EL TUTORIAL WAVELET SEGUNDA EDICION PARTE I

ROBI POLIKAR

November 9, 2017

CONCEPTOS FUNDAMENTALES & UNA VISIÓN GENERAL DE LA TEORÍA DE WAVELET

Bienvenido a este tutorial introductorio sobre transformaciones wavelet. La transformada wavelet es una concepto relativamente nuevo (alrededor de 10 años), pero aún hay bastantes artículos y libros escrito en ellos. Sin embargo, la mayoría de estos libros y artículos están escritos por personas de matemáticas, para el otras personas de matemáticas;

Todavía la mayoría de las personas de matemáticas no saben lo que las otras personas de matemáticas son 1 Página 2 hablando (un profesor de matemáticas hizo esta confesión). En otras palabras, la mayoría de los la literatura disponible sobre transformadas wavelet es de poca ayuda, si es que hay alguna, para aquellos que son nuevos en esto sujeto (esta es mi opinión personal). Cuando comencé a trabajar en transformaciones wavelet, he luchado durante muchas horas y días para descubrir qué estaba pasando en este misterioso mundo de transformaciones wavelet, debido a la falta de texto (s) de nivel introductorio (s) en este tema. Por lo tanto, he decidido escribir este tutorial para el los que son nuevos en el tema. Me considero bastante nuevo en el tema también, y tengo que confieso que todavía no he resuelto todos los detalles teóricos. Sin embargo, en cuanto a aplicaciones de ingeniería, creo que todos los detalles teóricos no son necesariamente necesario (!). En este tutorial trataré de dar los principios básicos que subyacen a la teoría wavelet. Las pruebas de la los teoremas y las ecuaciones relacionadas no se darán en este tutorial debido a la simple suposición de que los lectores previstos de este tutorial no los necesitan en este momento. Sin embargo, lectores interesados se dirigirá a referencias relacionadas para obtener información adicional y detallada. En este documento, asumo que no tienes ningún conocimiento previo, en absoluto. Si lo haces tener estos antecedentes, ignore la siguiente información, ya que

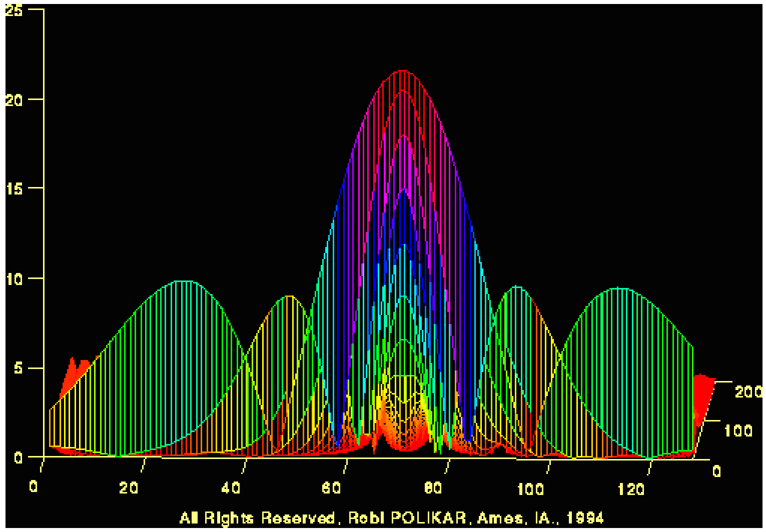


Figure 1: Introducción

puede ser trivial. Si encuentra información inconsistente o incorrecta en el siguiente tutorial, siéntase libre de contactarme Apreciaré cualquier comentario en esta página.

Robi Polikar

TRANS ... ¿QUÉ?

Antes que nada, ¿por qué necesitamos una transformación, o qué es una transformación de todos modos? Las transformaciones matemáticas se aplican a las señales para obtener más información de esa señal que no está disponible en la señal sin procesar. En el siguiente tutorial asumiré un señal del dominio del tiempo como una señal en *bruto*, y una señal que ha sido "transformada" por cualquiera de los transformaciones matemáticas disponibles como una señal *procesada*.

Hay una serie de transformaciones que se pueden aplicar, entre las cuales las transformadas de Fourier son, con mucho, los más populares. La mayoría de las señales en la práctica son señales de *DOMINIO DE TIEMPO* en su formato sin formato. Es decir, lo que sea que esa señal mida, es una función del tiempo. En otras palabras, cuando trazamos la señal uno de los ejes es el tiempo (variable independiente) y el otro (variable dependiente) suele ser el amplitud.

Cuando graficamos las señales del dominio del tiempo, obtenemos una representación de amplitud de tiempo la señal. Esta representación no es siempre la mejor representación de la señal para la mayoría de las señales procesamiento de aplicaciones relacionadas. En muchos casos, la información más destacada está oculta en el contenido de frecuencia de la señal. La *espectro de frecuencias* de una señal es básicamente la componentes de frecuencia (componentes espectrales) de esa señal. El espectro de frecuencia de una señal muestra qué frecuencias existen en la señal.

Intuitivamente, todos sabemos que la frecuencia tiene algo que ver con el cambio en la tasa de alguna cosa. Si algo (una variable matemática o física, sería la técnicamente correcta plazo) cambia rápidamente, decimos que es de alta frecuencia, donde como si esta variable no lo hace cambia rápidamente, es decir, cambia suavemente, decimos que es de baja frecuencia. Si esta variable no no cambia en absoluto, entonces decimos que tiene frecuencia cero o ninguna frecuencia. Por ejemplo, la publicación La frecuencia de un periódico diario es más alta que la de una revista mensual (se publica más frecuentemente).

La frecuencia se mide en ciclos / segundo, o con un nombre más común, en "Hertz". por Por ejemplo, la energía eléctrica que utilizamos en nuestra vida diaria en los EE. UU. es de 60 Hz (50 Hz en otro lugar del mundo). Esto significa que si tratas de trazar la corriente eléctrica, pasará una onda sinusoidal a través del mismo punto 50 veces en 1 segundo. Ahora, mira las siguientes figuras. El primero es una onda sinusoidal a 3 Hz, la segunda a 10 Hz, y la tercera a 50 Hz. Comparando:

Entonces, ¿cómo medimos la frecuencia, o cómo encontramos el contenido de frecuencia de una señal? La respuesta es la Transformada de Fourier (TF) . Si se toma el TFT de una señal en el dominio de tiempo, el se obtiene una representación de amplitud de frecuencia de esa señal. En otras palabras, ahora tenemos una trama 3 Página 4 siendo un eje la frecuencia y el otro la amplitud. Esta trama nos dice cuánto de cada frecuencia existe en nuestra señal. El eje de frecuencia comienza desde cero y sube hasta el infinito. Para cada frecuencia, tenemos un valor de amplitud Por ejemplo, si tomamos el TF de la corriente eléctrica que usamos en nuestras casas, tendremos un pico a 50 Hz, y nada en otro lugar, ya que esa señal tiene solo 50 Hz componente de frecuencia Ninguna otra señal, sin embargo, tiene un TF que es así de simple. Para la mayoría con fines prácticos, las señales contienen más de un componente de frecuencia. Los siguientes espectáculos el TF de la señal de 50 Hz:

El FT de la señal de 50 Hz dada en la Figura 3

Una palabra de precaución está en orden en este punto. Tenga en cuenta Figura 3 muestra dos gráficos diferentes. El inferior traza solo la primera mitad del superior. Debido a razones que no son cruciales para saber en este momento, el espectro de frecuencia de una señal con valor real es siempre simétrica. La trama superior ilustra este punto. Sin embargo, dado que la parte simétrica es exactamente una imagen especular de la primera parte, no proporciona información adicional. Y por lo tanto, esta segunda parte simétrica es usualmente no mostrada. En la mayoría de las siguientes figuras correspondientes a FT, solo mostraré la primera mitad de este espectro simétrico.

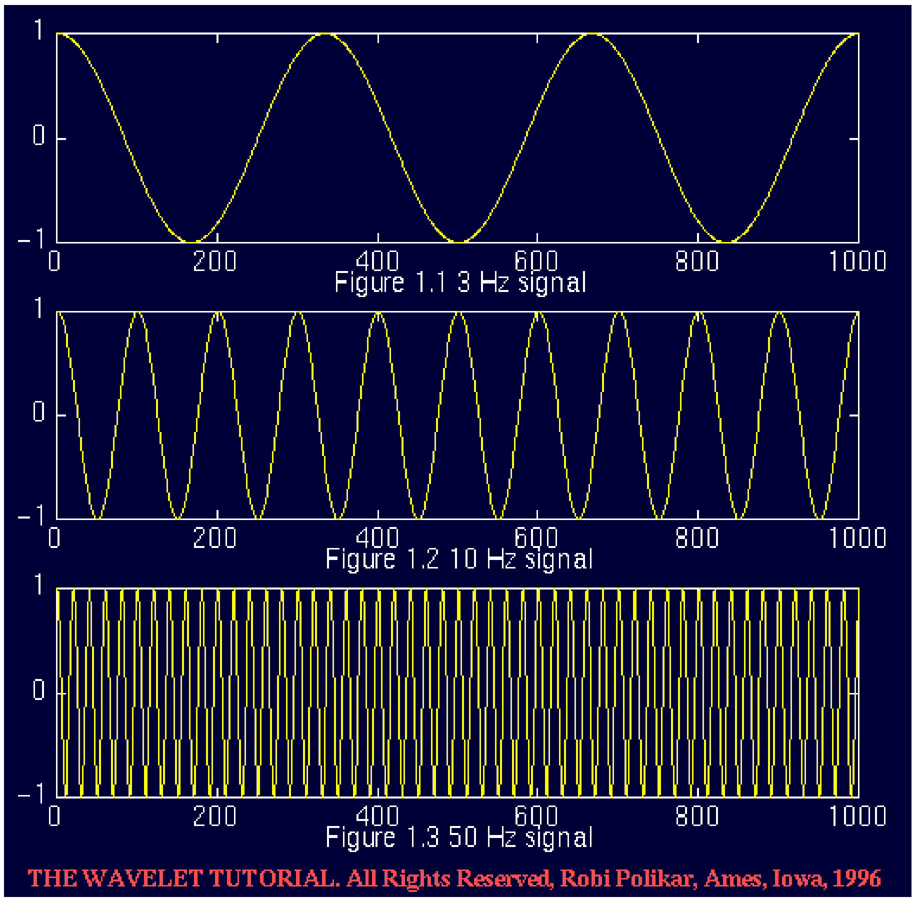

1
0
−1
0
200
400
600
800
1000
Figure 1.1 3 Hz signal
1
0
−1
0
200
400
600
800
1000
Figure 1.2 10 Hz signal
1
0
−1
0
200
400
600
800
1000
Figure 1.3 50 Hz signal
THE WAVELET TUTORIAL. All Rights Reserved, Robi Polikar, Ames, Iowa, 1996

Figure 2

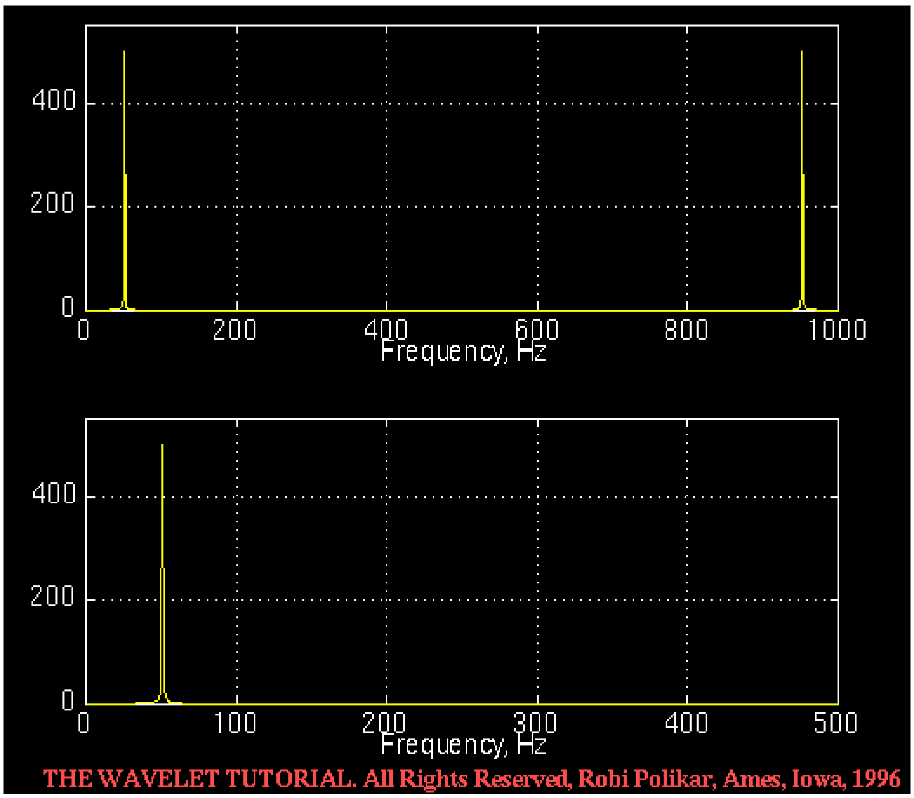


Figure 3: Espectro de 50 Hz

¿POR QUÉ NECESITAMOS LA INFORMACIÓN DE FRECUENCIA?

Muchas veces, la información que no se puede ver fácilmente en el dominio del tiempo se puede ver en el dominio de la frecuencia.

Vamos a dar un ejemplo de señales biológicas. Supongamos que estamos viendo una señal de ECG (ElectroCardioGraphy, grabación gráfica de la actividad eléctrica del corazón). La forma típica de un la señal de ECG saludable es bien conocida por los cardiólogos. Cualquier desviación significativa de esa forma es generalmente se considera que es un síntoma de una condición patológica.

Sin embargo, esta condición patológica puede no ser siempre obvia en el tiempo original. señal de dominio. Los cardiólogos generalmente usan las señales de ECG en el dominio del tiempo que se registran en gráficos de bandas para analizar las señales de ECG. Recientemente, los nuevos registradores / analizadores de ECG computarizados también utiliza la información de frecuencia para decidir si existe una condición patológica. UN condición patológica a veces se puede diagnosticar más fácilmente cuando el contenido de frecuencia de la señal es analizada

Esto, por supuesto, es solo un ejemplo simple de por qué el contenido de frecuencia puede ser útil. Hoy Las transformadas de Fourier se usan en muchas áreas diferentes, incluidas todas las ramas de la ingeniería. Aunque TF es probablemente la transformación más popular que se utiliza (especialmente en ingeniería), no es el único. Hay muchas otras transformaciones que se utilizan con bastante frecuencia por ingenieros y matemáticos. Transformada de Hilbert, transformada de Fourier de corta duración (más sobre esto más tarde), las distribuciones de Wigner, la Transformación de Radon y, por supuesto, nuestra transformación presentada , la transformación wavelet, constituyen solo una pequeña porción de una enorme lista de transformaciones que son disponible a disposición del ingeniero y el matemático. Cada técnica de transformación tiene su propio área de aplicación, con ventajas y desventajas, y la transformada wavelet (WT) no es excepción.

Para una mejor comprensión de la necesidad del TW, veamos el TF más de cerca. FT (también como TW) es una transformación reversible, es decir, permite retroceder y avanzar entre la señales procesadas (transformadas). Sin embargo, solo cualquiera de ellos está disponible en un momento dado. Es decir, no hay información de frecuencia disponible en la señal de dominio de tiempo, y no hay información de tiempo está disponible en la señal transformada de Fourier. La pregunta natural que viene a la mente es que es Es necesario tener tanto el tiempo como la información de frecuencia al mismo tiempo?

Como veremos pronto, la respuesta depende de la aplicación particular y de la

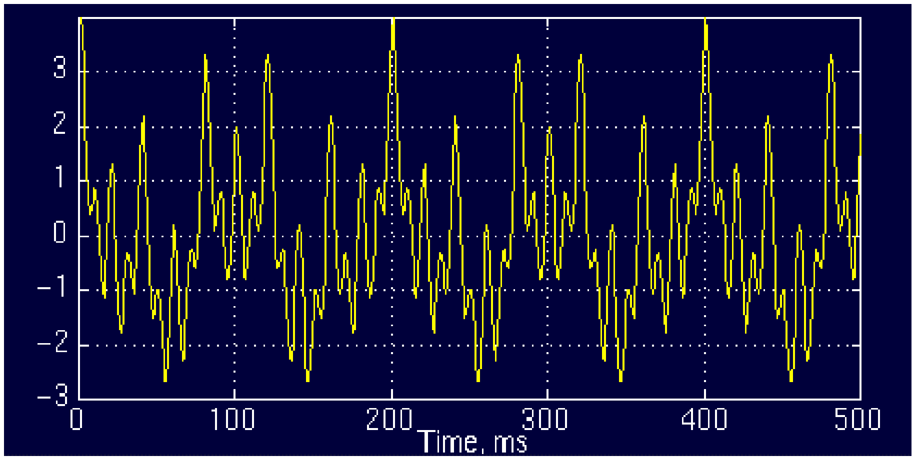


Figure 4: Señal compuesta

naturaleza del señal en la mano. Recuerde que el FT proporciona la información de frecuencia de la señal, lo que significa que nos dice cuánto de cada frecuencia existe en la señal, pero no nos dice cuándo tiempo que estos componentes de frecuencia existen. Esta información no es necesaria cuando la señal es así- llamado estacionario .

Echemos un vistazo más de cerca a este concepto de estacionariedad más de cerca, ya que es de suma importancia importancia en el análisis de señales. Las señales cuyo contenido de frecuencia no cambia en el tiempo se llaman señales estacionarias . En otras palabras, el contenido de frecuencia de las señales estacionarias no cambia en hora. En este caso, no es necesario saber en qué tiempos existen los componentes de frecuencia , ya que todos los componentes de frecuencia existen en todo momento !!! .

Por ejemplo, la siguiente señal:

$$x(t) = \cos(2*\pi*10*t) + \cos(2*\pi*25*t) + \cos(2*\pi*50*t) + \cos(2*\pi*100*t)$$

es una señal estacionaria, porque tiene frecuencias de 10, 25, 50 y 100 Hz en cualquier momento dado instante. Esta señal se traza a continuación:

Y el siguiente es su TF:

El diagrama superior en la Figura 4 es el espectro de frecuencia (la mitad del simétrico) de la señal en Figura 4. La gráfica inferior es la versión ampliada de la gráfica superior, que muestra solo el rango de frecuencias que nos interesan Tenga en cuenta los cuatro componentes espectrales correspondientes a la frecuencias 10, 25, 50 y 100 Hz. Contrariamente a la señal en la Figura 4, la siguiente señal no es estacionaria. Figura 6 traza una señal cuya frecuencia cambia constantemente en el tiempo. Esta señal se conoce como la señal de "chirrido" (*chirp*). Esta es una señal no estacionaria

Veamos otro ejemplo. La Figura 7 traza una señal con cuatro componentes de

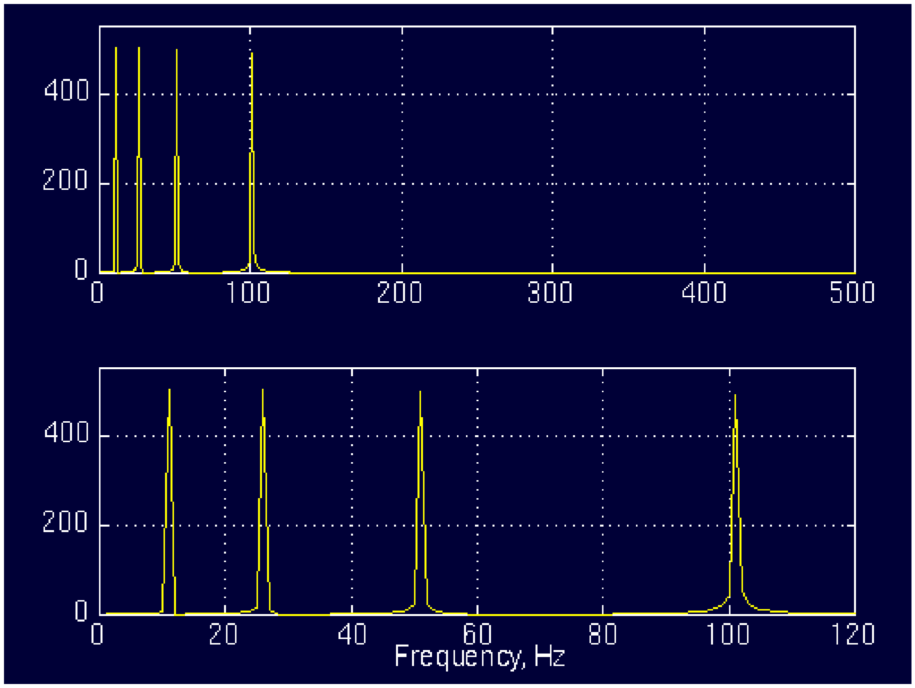


Figure 5: Transformada de Fourier de Fig. 4

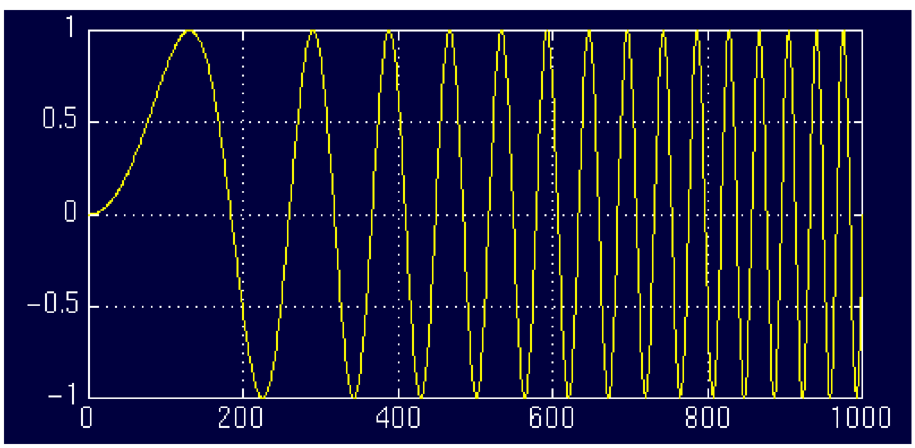


Figure 6: Chirp waveform

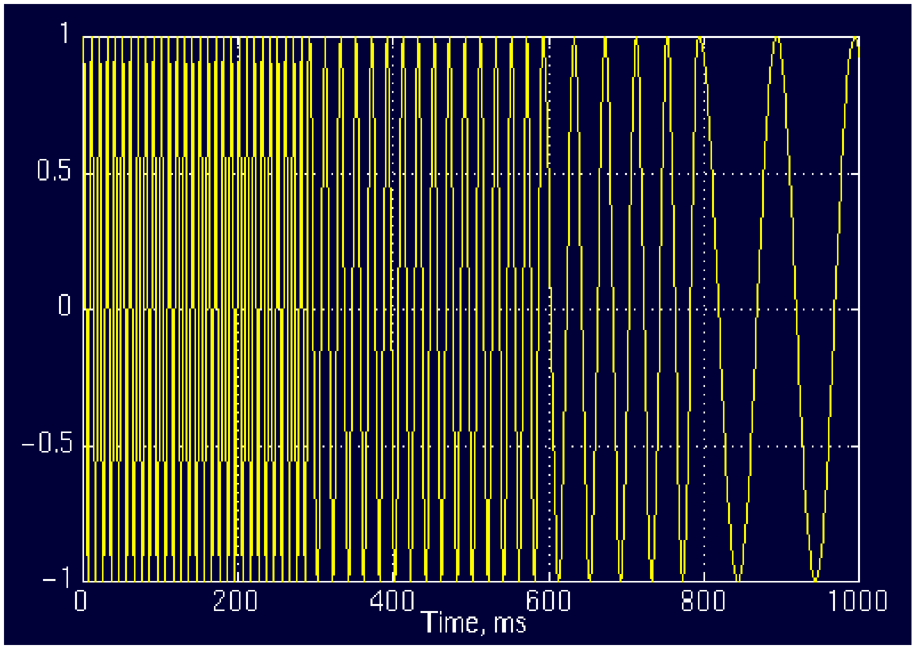


Figure 7: Intervalos de frecuencias

frecuencia diferentes en cuatro intervalos de tiempo diferentes, de ahí una señal no estacionaria. El intervalo de 0 a 300 ms tiene un 100 Hz sinusoidal, el intervalo de 300 a 600 ms tiene una sinusoide de 50 Hz, el intervalo de 600 a 800 ms tiene un valor de 25 Sinusoide Hz, y finalmente el intervalo de 800 a 1000 ms tiene una sinusoide de 10 Hz

Y el siguiente es su FT:

No te preocupes por las pequeñas ondas en este momento; se deben a cambios repentinos de uno componente de frecuencia a otro, que no tienen importancia en este texto. Tenga en cuenta que las amplitudes de componentes de frecuencia más alta son más altas que las de las frecuencias más bajas. Esto se debe al hecho de que las frecuencias más altas duran más (300 ms cada una) que la frecuencia más baja componentes (200 ms cada uno). (Los valores exactos de las amplitudes no son importantes). Aparte de esas ondas, todo parece estar bien. El FT tiene cuatro picos, que corresponden a cuatro frecuencias con amplitudes razonables ... ¿Cierto?

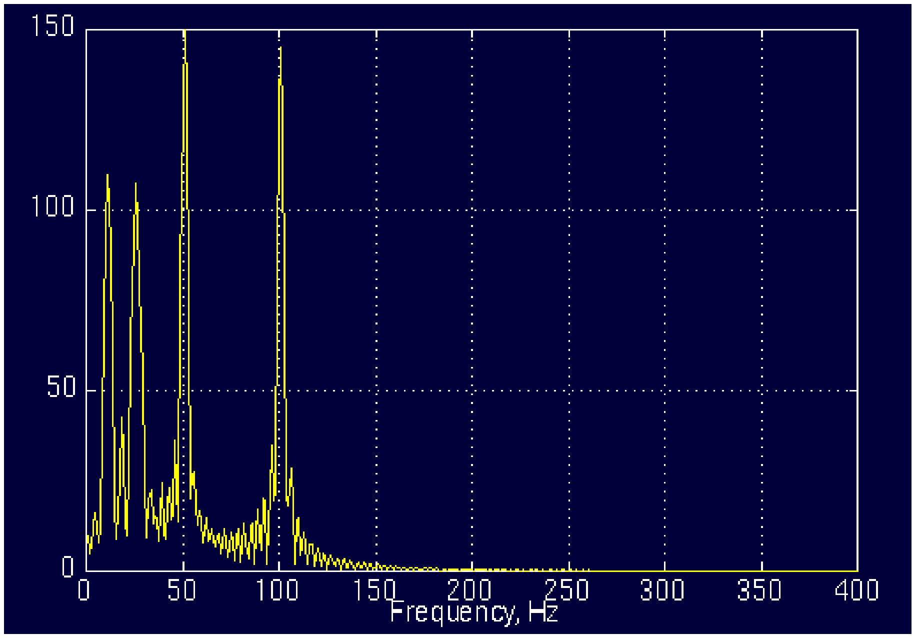


Figure 8: Transformada de Fourier de 7

INCORRECTO (!)

Bueno, no exactamente incorrecto, pero tampoco exactamente correcto ... Aquí está el por qué: Para la primera señal, graficada en la Figura 6, considere la siguiente pregunta:

¿En qué momentos (o intervalos de tiempo) ocurren estos componentes de frecuencia?

Respuesta: ¡En todo momento!

Recuerde que en las señales estacionarias, todos los componentes de frecuencia que existen en el señal, existe durante toda la duración de la señal. Hay 10 Hz en todo momento, hay 50 Hz en todo momento, y hay 100 Hz en todo momento.

Ahora, considere la misma pregunta para la señal no estacionaria en la Figura 7 o en la Figura 1.8. ¿En qué tiempos ocurren estos componentes de frecuencia?

Para la señal en la Figura 1.8, sabemos que en el primer intervalo tenemos la frecuencia más alta componente, y en el último intervalo tenemos el componente de frecuencia más bajo. Para la señal en Figura 1.7, los componentes de frecuencia cambian continuamente. Por lo tanto, para estas señales, ¡los componentes de frecuencia no aparecen en todo momento!

Ahora, compare las Figuras 1.6 y 8. La similitud entre estos dos espectros debería ser aparente. Ambos muestran cuatro componentes espectrales exactamente a las mismas frecuencias, es decir, a 10, 25, 50 y 100 Hz. Aparte de las ondas, y la diferencia en amplitud (que siempre puede normalizarse), los dos espectros son casi idénticos, aunque el dominio de tiempo correspondiente las señales ni siquiera están cerca la una de la otra. Ambas señales involucran la misma frecuencia componentes, pero el primero tiene estas frecuencias en todo momento, el segundo tiene estos frecuencias en diferentes intervalos. Entonces, ¿cómo es que los espectros de dos señales completamente diferentes se parecen mucho? Recuerde que el FT proporciona el contenido espectral de la señal, pero no da información sobre el momento en que aparecen esos componentes espectrales Por lo tanto, FT no es un técnica adecuada para señal no estacionaria, con una excepción: FT se puede utilizar para no señales estáticas, si solo estamos interesados en qué componentes espectrales existen en la señal, pero no le interesa dónde ocurren estos Sin embargo, si esta información es necesaria, es decir, si queremos saber qué componente espectral ocurre en qué momento (intervalo), entonces la transformada de Fourier no es la Transformar correctamente para usar.

Para fines prácticos, es difícil hacer la separación, ya que hay muchas prácticas señales estacionarias, así como no estacionarias. Casi todas las señales biológicas, por ejemplo, son no estacionario Algunos de los más famosos son ECG (actividad eléctrica del corazón, electrocardiógrafo), EEG (actividad eléctrica del cerebro, electroencefalograma) y EMG (actividad eléctrica de los músculos, electromiograma).

Una vez más, tenga en cuenta que, el FT da qué componentes de frecuencia (espectral componentes) existen en la señal. Ni mas ni menos.

Cuando se necesita la localización temporal de los componentes espectrales, una transformación que da La REPRESENTACIÓN DE FRECUENCIA DE TIEMPO de la señal es necesaria.

LA SOLUCIÓN DEFINITIVA: LA TRANSFORMACIÓN DE WAVELET

La transformada wavelet es una transformada de este tipo. Proporciona la representación de frecuencia de tiempo. (Hay otras transformaciones que proporcionan esta información también, como Fourier de corta duración) transformar, distribuciones de Wigner, etc.)

Muchas veces un componente espectral particular que ocurre en cualquier instante puede ser de particular interés. En estos casos, puede ser muy beneficioso conocer los intervalos de tiempo que estos espectrales particulares componentes ocurren. Por ejemplo, en EEG, la latencia de un potencial relacionado con un evento es de Interés particular (El potencial relacionado con el evento es la respuesta del cerebro a un estímulo específico como luz de flash, la latencia de esta respuesta es la cantidad de tiempo transcurrido entre el inicio de la estímulo y la respuesta).

La transformada Wavelet es capaz de proporcionar la información de tiempo y frecuencia simultáneamente, por lo tanto, dando una representación de tiempo-frecuencia de la señal.

Cómo funciona la transformación wavelet es completamente una historia divertida diferente, y debería explicarse después Transformada de Fourier de corta duración (STFT) . El WT fue desarrollado como una alternativa al STFT. El STFT se explicará en gran detalle en la segunda parte de este tutorial. Es suficiente en este Es hora de decir que el WT fue desarrollado para superar algunos problemas relacionados con la resolución de la STFT, como se explica en la Parte II.

Para resumir una historia larga, pasamos la señal del dominio del tiempo desde varios pasos altos y bajos filtros de paso, que filtran porciones de alta o baja frecuencia de la señal. Esta se repite el procedimiento, cada vez que parte de la señal corresponde a algunas frecuencias siendo eliminado de la señal.

Así es como funciona esto: supongamos que tenemos una señal que tiene frecuencias de hasta 1000 Hz. En el primera etapa dividimos la señal en dos partes al pasar la señal de un paso alto y una filtro de paso bajo (los filtros deben cumplir ciertas condiciones, lo que se conoce como condición de admisibilidad) que da como resultado dos versiones diferentes de la misma señal: parte de la señal correspondiente a 0-500 Hz (porción de paso bajo) y 500-1000 Hz (porción de paso alto).

Luego, tomamos una porción (generalmente parte de paso bajo) o ambas, y hacemos lo mismo otra vez. Esta operación se llama descomposición .

Suponiendo que hemos tomado la parte de paso bajo, ahora tenemos 3 conjuntos de datos, cada uno correspondiente a la misma señal en las frecuencias 0-250 Hz, 250-500 Hz, 500-1000 Hz.

Luego tomamos la porción de paso bajo nuevamente y la pasamos a través de filtros de paso bajo y alto; nosotros ahora tiene 4 juegos de señales correspondientes a 0-125 Hz, 125-250 Hz, 250-500 Hz y 500-1000 Hz. Continuamos así hasta que hayamos descompuesto la señal a un cierto nivel predefinido. Entonces tenemos un montón de señales, que en realidad representan la misma señal, pero todas corresponden a diferentes bandas de frecuencia. Sabemos qué señal corresponde a qué banda de frecuencia, y si los unimos a todos y los trazamos en un gráfico tridimensional, tendremos tiempo en un eje, frecuencia en el segundo y amplitud en el tercer eje. Esto nos mostrará qué frecuencias existe en qué momento (hay un problema, llamado "principio de incertidumbre", que dice que no podemos saber exactamente qué frecuencia existe en cada momento , pero solo podemos saber qué existen bandas de frecuencia a qué intervalos de tiempo , más sobre esto en las partes siguientes de este tutorial).

Sin embargo, todavía me gustaría explicarlo brevemente.

El principio de incertidumbre, originalmente encontrado y formulado por Heisenberg, afirma que, el el momento y la posición de una partícula en movimiento no pueden conocerse simultáneamente. Esto aplica a nuestro tema de la siguiente manera:

La información de frecuencia y tiempo de una señal en cierto punto del plano tiempo-frecuencia no puede ser conocido. En otras palabras: no podemos saber qué componente espectral existe en ningún dado instante de tiempo . Lo mejor que podemos hacer es investigar qué componentes espectrales existen en cualquier intervalo de tiempo dado . Este es un problema de resolución, y es la razón principal por la cual los investigadores han cambiado a WT desde STFT. STFT proporciona una resolución fija en todo momento, mientras que WT da una resolución variable de la siguiente manera:

Las frecuencias más altas se resuelven mejor en el tiempo, y las frecuencias más bajas se resuelven mejor en frecuencia. Esto significa que un determinado componente de alta frecuencia puede ubicarse mejor a tiempo (con menos error relativo) que un componente de baja frecuencia. Por el contrario, una baja frecuencia el componente se puede ubicar mejor en frecuencia en comparación con el componente de alta frecuencia.

Echa un vistazo a la siguiente grilla:

```
f ^
  | ******************************************* continuo
  | *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  * transformada wavelet
  | *     *     *     *     *     *     *
  | *           *           *           *
  | *                       *
  --------------------------------------------> tiempo
```

Interpreta la grilla anterior de la siguiente manera: La fila superior muestra que a frecuencias más altas tenemos más muestras correspondientes a intervalos de tiempo más pequeños. En otras palabras, las frecuencias más altas pueden ser resuelto mejor a tiempo. La fila inferior, sin embargo, corresponde a bajas frecuencias, y hay menos número de puntos para caracterizar la señal, por lo tanto, las bajas frecuencias no se resuelven bien a tiempo.

```
  ^ frecuencia
  |
  |
  |
  | **************************************
  |
  |
```

```
|
| * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *           transformada wavele
|                                                   tiempo discreto
|
| *   *   *   *   *   *   *   *   *   *
|
| *       *       *       *       *
| *               *               *
| ---------------------------------------------------------> tiempo
```

En caso de tiempo discreto, la resolución de tiempo de la señal funciona igual que antes, pero ahora, la la información de frecuencia tiene diferentes resoluciones en cada etapa también. Tenga en cuenta que, frecuencias más bajas se resuelven mejor en frecuencia, donde las frecuencias más altas no lo son. Tenga en cuenta cómo el espaciado entre los componentes de frecuencia posteriores aumentan a medida que aumenta la frecuencia.

A continuación, hay algunos ejemplos de transformada wavelet continua: tomemos una señal sinusoidal, que tiene dos componentes de frecuencia diferentes en dos momentos diferentes: Tenga en cuenta la parte de baja frecuencia primero, y luego la frecuencia alta.

La transformada wavelet continua de la señal anterior:

Sin embargo, tenga en cuenta que el eje de frecuencia en estos gráficos está etiquetado como escala . El concepto de la escala se aclarará más en las secciones siguientes, pero debe tenerse en cuenta en este momento que la la escala es inversa a la frecuencia. Es decir, las escalas altas corresponden a bajas frecuencias y escalas bajas corresponden a altas frecuencias. En consecuencia, el pequeño pico en la trama corresponde a la alta componentes de frecuencia en la señal, y el pico grande corresponde a baja frecuencia componentes (que aparecen antes de los componentes de alta frecuencia en el tiempo) en la señal.

Es posible que se desconcierte con la resolución de frecuencia que se muestra en la gráfica, ya que muestra una buena resolución de frecuencia a altas frecuencias. Sin embargo, tenga en cuenta que es la buena resolución de escala que se ve bien a altas frecuencias (escalas bajas), y una buena resolución de escala significa baja frecuencia resolución y viceversa. Más sobre esto en la Parte II y III.

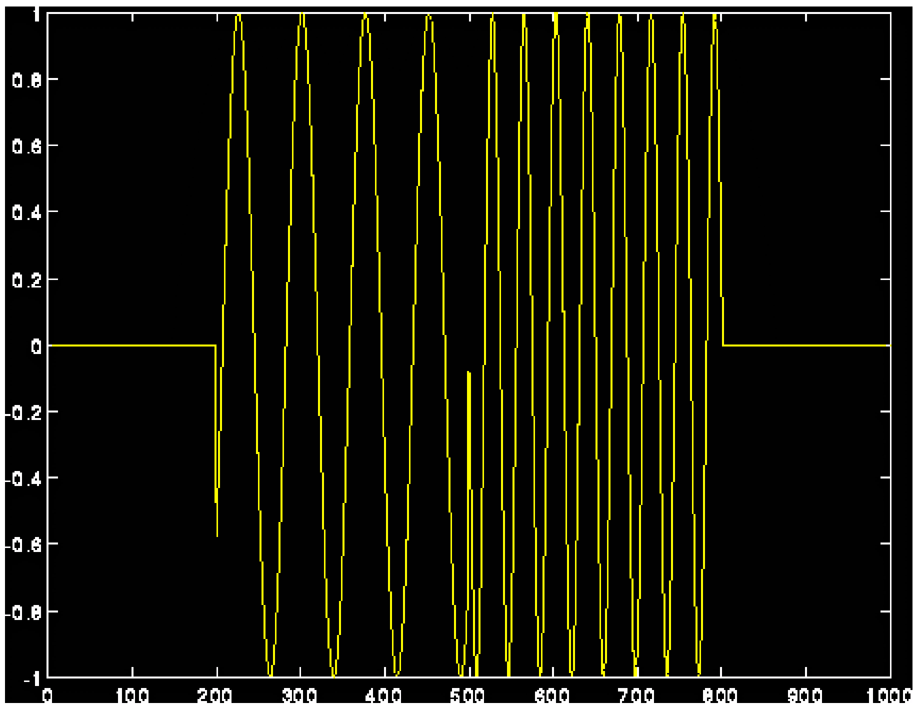

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

Figure 9

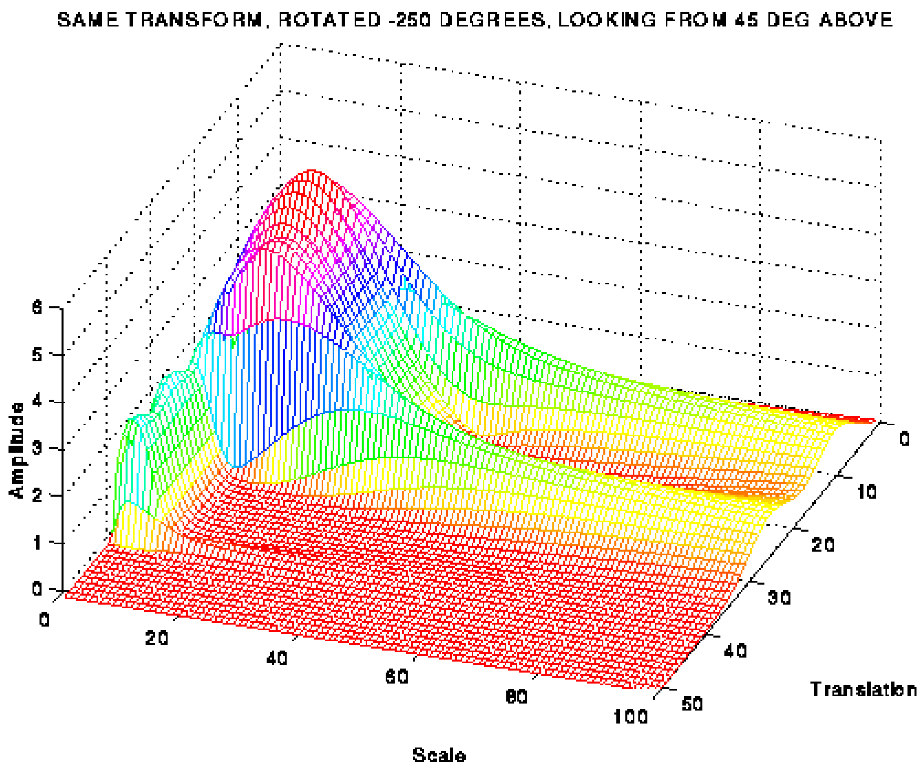


Figure 10: Tranformada de Fourier de Fig

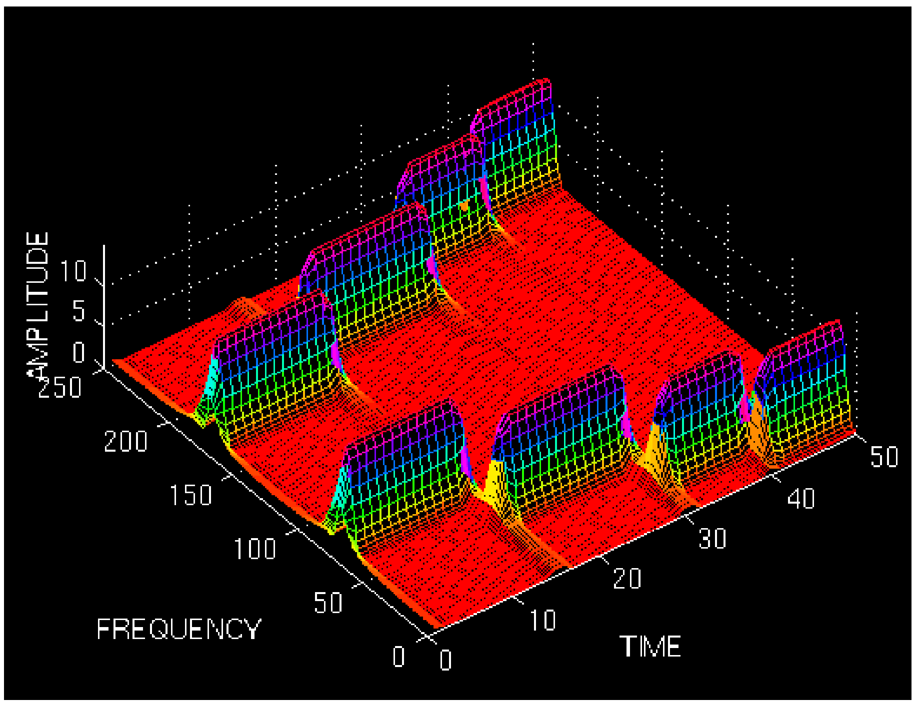

AMPLITUDE
10
5
0
250
200
150
100
50
0
FREQUENCY
0
10
20
30
40
50
TIME

Figure 11

EL TUTORIAL WAVELET PARTE 2

FUNDAMENTALES

Hagamos una breve reseña de la primera parte.

Básicamente, necesitamos Wavelet Transform (WT) para analizar señales no estacionarias, es decir, la respuesta de frecuencia varía en el tiempo. He escrito que Fourier Transform (FT) no es adecuado para señales no estacionarias, y he mostrado ejemplos de eso para hacerlo más claro. Para un recuerdo rápido, déjame dar el siguiente ejemplo. Supongamos que tenemos dos señales diferentes. Supongamos también que ambos tienen el mismo espectro componentes, con una diferencia importante.

Supongamos que una de las señales tiene cuatro componentes de frecuencia en todo el tiempo, y el otro tiene los mismos cuatro componentes de frecuencia en diferentes momentos. La TF de ambas señales serían las mismas, como se muestra en el ejemplo de la parte 1 de este tutorial. ¡Aunque las dos señales son completamente diferentes, su (magnitud de) TF es la MISMA ! Esta obviamente nos dice que no podemos usar el FT para señales no estacionarias.

Pero, ¿por qué sucede esto? En otras palabras, ¿cómo es que ambas señales tienen la misma TF? ¿CÓMO FUNCIONA FOURIER TRANSFORM DE CUALQUIER FORMA? Un hito importante en el procesamiento de señales:

LA TRANSFORMACIÓN DE FOURIER

No entraré en los detalles de TF por dos razones:

1. Es un tema demasiado amplio para discutir en este tutorial.

2. No es nuestra principal preocupación de todos modos.

Sin embargo, me gustaría mencionar un par de puntos importantes nuevamente por dos razones:

1. Es un trasfondo necesario para entender cómo funciona TW.

2. Ha sido la herramienta de procesamiento de señal más importante para muchos (y me refiero a muchos muchos años.

En el siglo XIX (1822 *, para ser exactos, pero no necesitas saber la hora exacta. Solo confía en mí que es mucho antes de lo que puedas recordar), el matemático francés J. Fourier, demostró que cualquier función periódica se puede expresar como una suma infinita de exponencial complejo periódico funciones. Muchos años después de haber descubierto esta notable propiedad de funciones (periódicas), sus ideas se generalizaron a primeras funciones no periódicas, y luego periódicas o no periódicas señales de tiempo discreto. Es después de esta generalización que se convirtió en una herramienta muy adecuada para cálculos de computadora.

En 1965, se utilizó un nuevo algoritmo llamado Fast Fourier Transform (FFT). desarrollado y FT se hizo aún más popular. (* Doy gracias al Dr. Pedregal por la valiosa información que ha proporcionado)

Ahora echemos un vistazo a cómo funciona Fourier Transform: FT descompone una señal para funciones exponenciales complejas de diferentes frecuencias. La forma en que hace esto, está definido por las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bullet e^{-2j\pi ft} dt \quad (1) \\ x(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \bullet e^{-2j\pi ft} df \quad (2) \end{aligned}$$

Figura 2.1

En la ecuación anterior, t representa el tiempo, f representa la frecuencia y x indica la señal a mano. Tenga en cuenta que x denota la señal en el dominio del tiempo y la X denota la señal en el dominio de la frecuencia. Esta convención se usa para distinguir las dos representaciones de la señal. La ecuación (1) se llama la transformada de Fourier de $x(t)$, y la ecuación (2) se llama transformada de Fourier inversa de $X)f)$, que es $x(t)$.

Para aquellos de ustedes que han estado usando la transformada de Fourier ya están familiarizados con esto. Desafortunadamente, muchas personas usan estas ecuaciones sin conocer el principio subyacente.

Por favor, eche un vistazo más de cerca a la ecuación (1):

La señal $x(t)$, se multiplica con un término exponencial, en cierta frecuencia "f" , y luego se integra sobre todo el rango de tiempo (Las palabras clave aquí son "todos los tiempos", como se explicará abajo).

Tenga en cuenta que el término exponencial en Eqn. (1) también se puede escribir como:

$\cos(2\pi ft) + j\sin(2\pi ft) \quad (3)$

La expresión anterior tiene una parte real del coseno de frecuencia f, y una parte imaginaria del seno de frecuencia f. Entonces, lo que en realidad estamos haciendo es multiplicar la señal original con un complejo expresión que tiene senos y cosenos de frecuencia f. Luego integramos este producto. En otra palabras, agregamos todos los puntos en este producto. Si el resultado de esta integración (que no es más que algún tipo de suma infinita) es un gran valor, luego decimos que: la señal $x(t)$, tiene una componente espectral dominante a la frecuencia "f" . Esto significa que, una parte importante de esta señal está compuesto de frecuencia f. Si el resultado de la integración es un valor pequeño, esto significa que el la señal no tiene un componente de frecuencia principal de f en ella. Si este resultado de integración es cero, entonces la señal no contiene la frecuencia "f" en absoluto.

Es de particular interés aquí ver cómo funciona esta integración: la señal se multiplica con el término sinusoidal de frecuencia "f". Si la señal tiene una componente de gran amplitud de frecuencia "f", entonces ese componente y el término sinusoidal coincidirán, y el producto de ellos dará una (relativamente) gran valor . Esto muestra que, la señal "x", tiene un componente de frecuencia principal de "F".

Sin embargo, si la señal no tiene un componente de frecuencia de "f", el producto arrojará cero, que muestra que, la señal no tiene un componente de frecuencia de "f". Si la frecuencia "f" es no es un componente principal de la señal $x(t)$, entonces el producto dará un valor (relativamente) pequeño . Esto muestra que, el componente de frecuencia "f" en la señal "x", tiene una amplitud pequeña, en otro palabras, no es un componente principal de "x".

Ahora, tenga en cuenta que la integración en la ecuación de transformación (ecuación 1) es a través del tiempo. La mano izquierda lado de (1), sin embargo, es una función de frecuencia. Por lo tanto, la integral en (1), se calcula para cada valor de f.

IMPORTANTE (!) La información proporcionada por la integral, corresponde a instancias de todos los tiempos, ya que la integración es de menos infinito a más infinito en el tiempo. Se deduce que no importa donde a tiempo aparece el componente con la frecuencia "f", afectará el resultado del integración igualmente igualmente. En otras palabras, si el componente de frecuencia "f" aparece en el momento t1 o t2, tendrá el mismo efecto en la integración. Esta es la razón por la cual la *transformada de Fourier no es adecuado si la señal tiene una frecuencia variable en el tiempo*, es decir, la señal no es estacionaria. Si solo, el la señal tiene el componente de frecuencia "f" en todo momento (para todos los valores "f"), luego el resultado obtenido por la transformada de Fourier tiene sentido.

Tenga en cuenta que la transformada de Fourier indica si existe o no un determinado componente de frecuencia. Esta información es independiente de en qué momento aparece este componente. Por lo tanto, es muy Es importante saber si una señal es estacionaria o no, antes de procesarla con el TF.

El ejemplo dado en la primera parte ahora debe ser claro. Me gustaría darlo aquí de nuevo:

Mira la siguiente figura, que muestra la señal:

$$x(t) = \cos(2 * \pi * 5 * t) + \cos(2 * \pi * 10 * t) + \cos(2 * \pi * 20 * t) + \cos(2 * \pi * 50 * t)$$

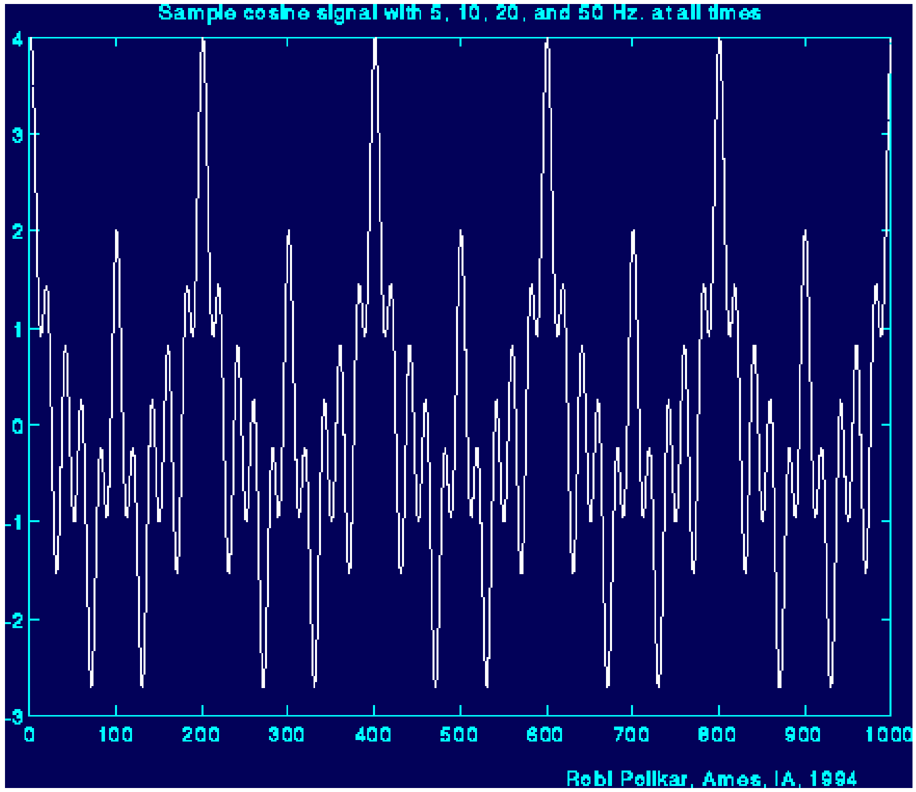


Figure 12: Forma de onda compuesta por 4 componentes

es decir, tiene cuatro componentes de frecuencia de 5, 10, 20 y 50 Hz., todos ocurriendo en todo momento.

Y aquí está el TF de eso. El eje de frecuencia se ha cortado aquí, pero teóricamente se extiende a infinito (para transformada de Fourier continua (TFC). En realidad, aquí calculamos el Transformada de Fourier discreto (TFD o DFT), en cuyo caso el eje de frecuencia asciende a (al menos) el doble del frecuencia de muestreo de la señal, y la señal transformada es simétrica. Sin embargo, esto no es eso importante en este momento)

Tenga en cuenta los cuatro picos en la figura anterior, que corresponden a cuatro frecuencias diferentes.

Ahora, mira la siguiente figura: Aquí la señal es nuevamente la señal del coseno, y tiene el mismo cuatro frecuencias. Sin embargo, estos componentes ocurren en diferentes momentos .

Y aquí está la transformada de Fourier de esta señal:

Lo que se supone que debes ver en la figura anterior, es (casi) lo mismo con el anterior

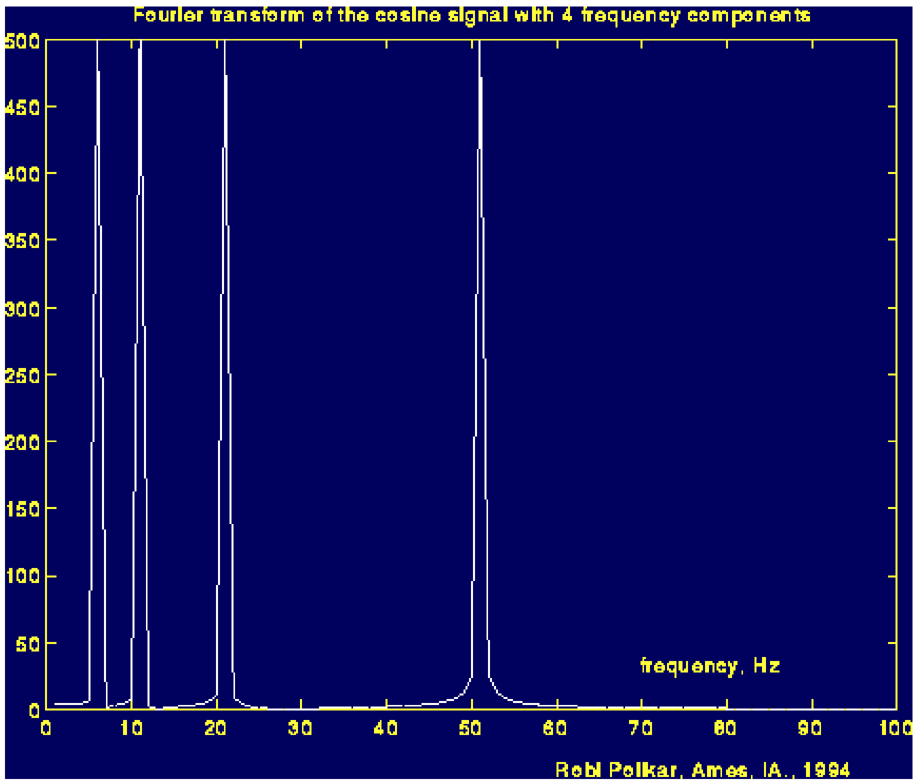


Figure 13: Espectro de los cuatro cosenos estacionarios

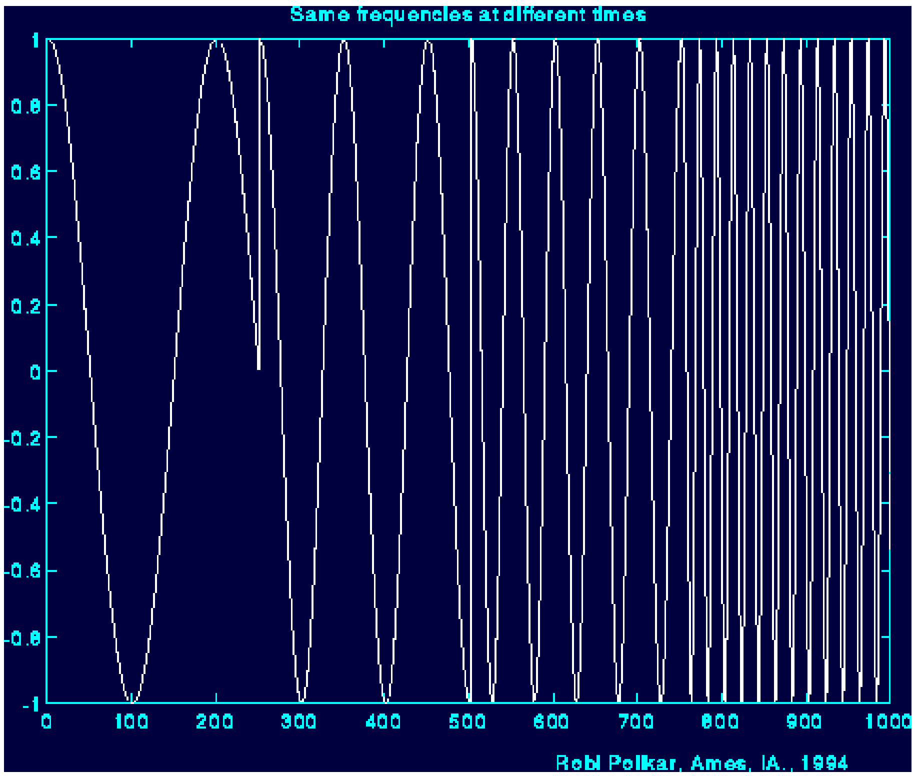


Figure 14: Cuatro cosenos no-estacionarios

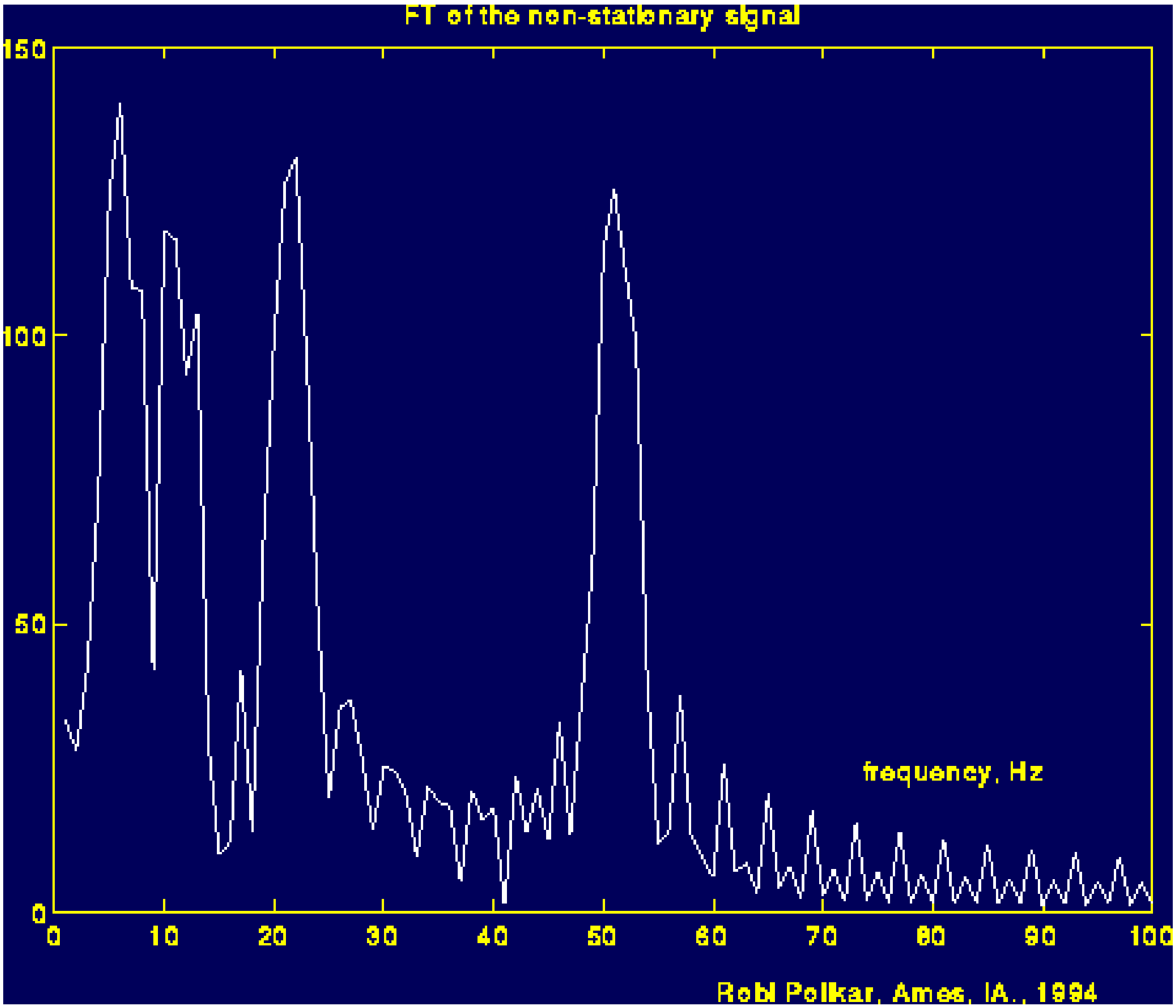


Figure 15: Espectro de 4 cosenos no-estacionarios

FT figura. Mire cuidadosamente y observe los cuatro picos principales correspondientes a 5, 10, 20 y 50 Hz. Pude haber hecho que esta figura pareciera muy similar a la anterior, pero no hice eso en propósito. La razón del ruido como una cosa entre picos muestra que, esas frecuencias también existir en la señal. Pero la razón por la que tienen una amplitud pequeña es porque no son importantes componentes espectrales de la señal dada , y la razón por la que los vemos, es debido a la repentina cambiar entre las frecuencias. Nótese especialmente cómo la señal del dominio del tiempo cambia a la vuelta del tiempo 250 (ms) (Con algunas técnicas de filtrado adecuadas, el ruido como parte del dominio de la frecuencia la señal se puede limpiar, pero esto no tiene nada que ver con nuestro tema ahora. Si necesitas más información por favor envíeme un correo electrónico).

Para entonces, ya deberías haber entendido los conceptos básicos de la transformada de Fourier, cuando podamos utilízalo y no podemos. Como puede ver en el ejemplo anterior, TF no puede distinguir los dos señales muy bien. Para TF, ambas señales son iguales, porque constituyen de la misma componentes de frecuencia.

Por lo tanto, TF no es una herramienta adecuada para analizar señales no estacionarias, es decir, señales con espectros variables en el tiempo. Por favor, tenga en cuenta esta propiedad tan importante. Desafortunadamente, muchas personas que usan TF lo hacen No pienses en esto. Suponen que la señal que tienen es estacionaria donde no está en muchos casos prácticos. Por supuesto, si no está interesado en en qué ocasiones estas frecuencias componentes , pero solo interesados en qué componentes de frecuencia existen, entonces TF puede ser una herramienta adecuada para usar.

Entonces, ahora que sabemos que no podemos usar (bueno, podemos, pero no debemos) TF para no estacionario señales, ¿qué vamos a hacer?

Recuerda que, he mencionado que la transformación wavelet tiene solo (aproximadamente) una década de antigüedad. Puedes Me pregunto si los investigadores notaron este negocio no estacionario hace solo diez años o no.

Obviamente no.

Aparentemente deben haber hecho algo al respecto antes de descubrir la wavelet transformar....?

Bueno ... seguro que sí ... Han venido con ...

REPRESENTACIONES DE FRECUENCIA DE TIEMPO LINEAL

LA TRANSFORMACIÓN FOURIER A CORTO PLAZO (Short Time Fourier Transform STFT)

Entonces, ¿cómo vamos a insertar este negocio del tiempo en nuestras parcelas de frecuencia? Miremos el problema en la mano un poco más cerca.

¿Qué pasa con TF? No funcionó para señales no estacionarias. Pensemos esto: ¿podemos supongamos que, alguna porción de una señal no estacionaria es estacionaria?

La respuesta es sí. Solo mira la tercera figura de arriba.

La señal es estacionaria cada 250 intervalos de unidad de tiempo.

Usted puede hacer la siguiente pregunta: ¿Qué sucede si la parte que podemos considerar estacionaria es muy pequeña?

Bueno, si es demasiado pequeño, es demasiado pequeño. No hay nada que podamos hacer al respecto, y de hecho, hay tampoco hay nada de malo en eso. Tenemos que jugar este juego con las reglas de los físicos.

Si esta región donde se puede suponer que la señal es estacionaria es demasiado pequeña, entonces observamos eso señal de ventanas estrechas, lo suficientemente estrecha como para que la porción de la señal vista desde estos las ventanas son de hecho estacionarias.

Este enfoque de los investigadores terminó con una versión revisada de la transformada de Fourier, llamada: La Transformada de Fourier a Corto Tiempo (STFT).

Solo hay una pequeña diferencia entre STFT y TF. En STFT, la señal se divide en pequeños suficientes segmentos, donde puede suponerse estos segmentos (porciones) de la señal a ser estacionario. Para este propósito, una función de ventana "w" se elige. La anchura de esta ventana debe ser igual el segmento de la señal donde su estacionariedad es válido.

Esta función de ventana se encuentra primero con el principio de la señal. Es decir, la ventana función se encuentra en $t = 0$. Supongamos que el ancho de la ventana es "T" s. En este momento instante (t = 0), la función de ventana se solapará con las primeras $T/2$ segundos (I a suponer que todo unidades de tiempo son en segundos). La función de la ventana y la señal se multiplican a continuación. Haciendo esto, sólo la primera $T/2$ segundos de la señal está siendo elegido, con la ponderación apropiada de la ventana (si la ventana es un rectángulo, con una amplitud "1", entonces el producto será igual a la señal). Luego este producto se supone que es sólo otra señal, cuya TF debe ser tomada. En Es decir, TF de este producto se toma, al igual que tomar el TF de cualquier señal.

El resultado de esta transformación es el TF de los primeros $T/2$ segundos de la

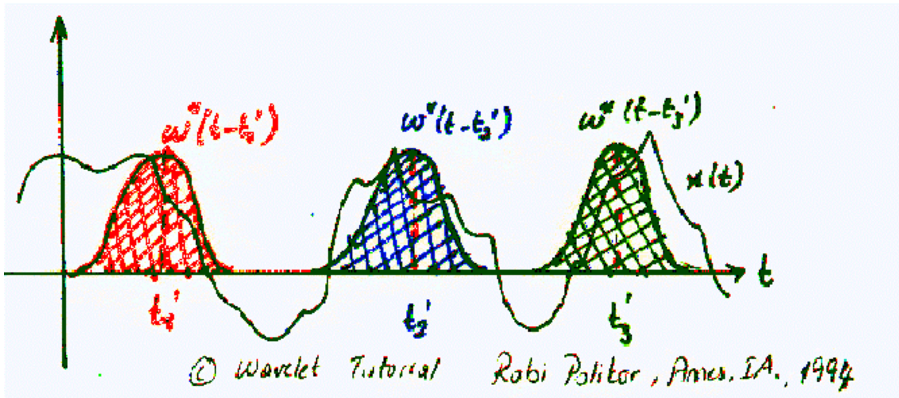


Figure 16: STFT - tres cuadros

señal. Si esta porción de la señal es estacionaria, como se supone, entonces no habrá ningún problema y el resultado obtenido será una representación verdadera frecuencia de la primera $T/2$ segundos de la señal.

El siguiente paso, sería desplazar esta ventana (para algunos segundos t1) a una nueva ubicación, multiplicar con la señal, y tomando el TF del producto. Este procedimiento se siguió, hasta el final de la señal se alcanza desplazando la ventana con intervalos de segundos "T1".

La siguiente definición de la STFT resume todas las explicaciones anteriores en una línea:

$$STFT_X^{(\omega)}(t,f) \quad = \quad \int_t [x(t) \cdot \omega^*(t-t') \cdot e^{-j2\pi ft} dt \quad (3)$$

Figura 2.6

Por favor, mire la ecuación anterior con cuidado. x (t) es la señal en sí, w (t) es la función de ventana, y * es el complejo conjugado. Como se puede ver en la ecuación, la STFT de la señal es nada más que la TF de la señal multiplicada por una función de ventana.

Para cada t' y f un nuevo coeficiente STFT se calcula (Corrección: El 't' en el paréntesis de STFT debe ser "t '". Voy a corregir esto pronto. simplemente me he dado cuenta que he escrito mal él).

En la siguiente figura puede ayudar a entender esto un poco mejor:

Las funciones de Gauss-como en el color son al sistema de ventanas. El rojo muestra el ventana situada en t = t1' , el azul muestra t = t2' , y el verde muestra la ventana situada en t = t3' . Estos corresponderán a tres FTS diferentes en tres momentos

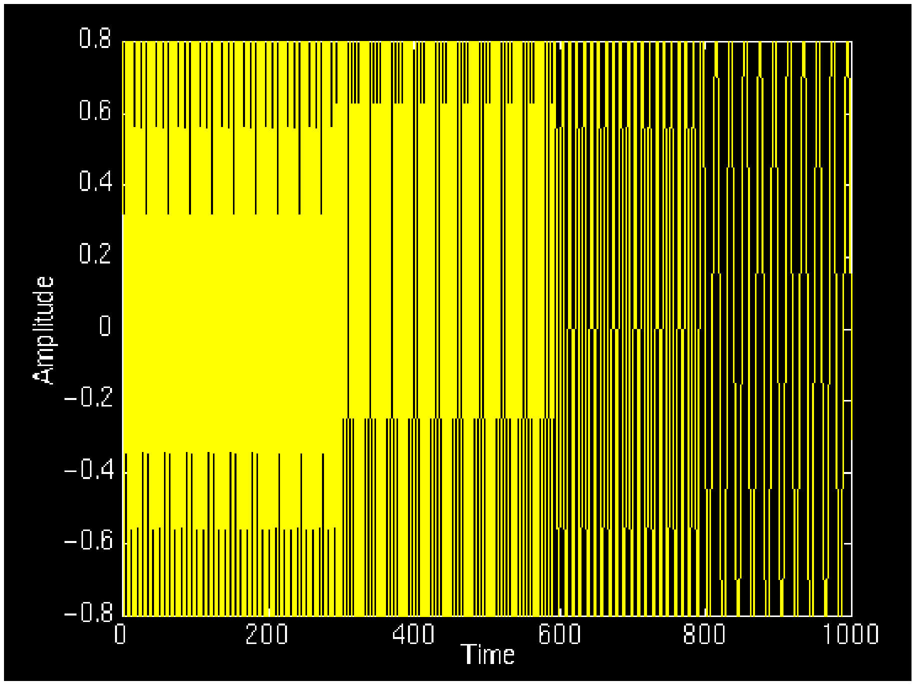


Figure 17: Señal no-periódica

diferentes. Por lo tanto, lo haremos obtener una verdadera representación tiempo-frecuencia (TFR) de la señal. Probablemente la mejor manera de entender esto estaría buscando a un ejemplo.

En primer lugar, ya nuestra transformación es una función del tiempo y la frecuencia (a diferencia de FT, que es una función de Sólo frecuencia), la transformada sería de dos dimensiones (tres, si se cuenta la amplitud también). Vamos a tomar una señal no estacionaria como la siguiente:

En esta señal, hay cuatro componentes de frecuencia en diferentes momentos.

El intervalo de 0 a 250 ms es una sinusoide sencillo de 300 Hz, y los otros 250 ms intervalos son sinusoides de 200 Hz, 100 Hz, y 50 Hz, respectivamente. Aparentemente, esto es una señal no estacionaria.

Ahora, vamos a ver su STFT:

Figura 2.9

Como era de esperar, este es un gráfico de dos dimensiones (3 dimensiones, si se cuenta la amplitud también). los "X" y los ejes "Y" son el tiempo y frecuencia, respectivamente. Por favor, ignorar los números en los ejes, ya que están normalizados en algún aspecto, que no es de ningún interés para nosotros en este momento. Sólo

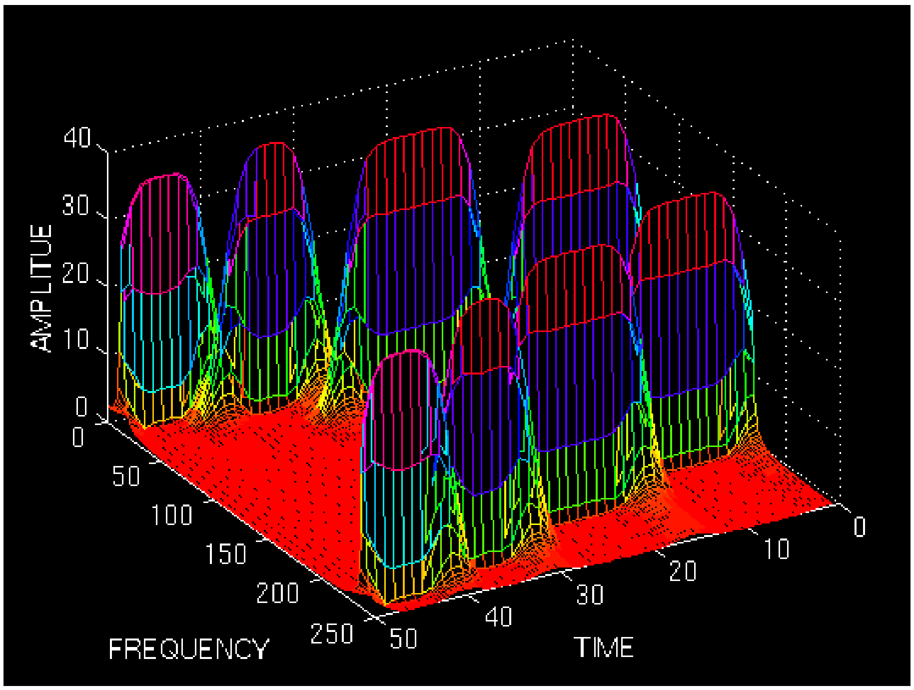


Figure 18: STFT de la señal

examinar la forma de la representación tiempo-frecuencia.

En primer lugar, tenga en cuenta que la gráfica es simétrica con respecto a la línea media del eje de frecuencia. Recuerde que, aunque no se muestra, FT de una señal real es siempre simétrica, ya que STFT no es más que una versión con ventanas de la FT, debe venir como ninguna sorpresa que la STFT es también simétrica en frecuencia. La parte simétrica se dice que está asociada a frecuencias negativas, un concepto extraño que es difícil de comprender, por suerte, no es importante; basta saben que la STFT y FT son simétricas.

Lo que es importante, son los cuatro picos; en cuenta que hay cuatro picos que corresponden a cuatro diferentes componentes de frecuencia. También tenga en cuenta que, a diferencia de FT, estas cuatro picos se encuentran en diferentes intervalos de tiempo a lo largo del eje de tiempo . Recuerde que la señal original tenía cuatro componentes espectrales situados en diferentes momentos.

Ahora tenemos una verdadera representación tiempo-frecuencia de la señal. No sólo lo que sabemos componentes de frecuencia están presentes en la señal, pero también saben dónde se encuentren en el tiempo.

¡Bueno en realidad no!

Usted puede preguntarse, ya que STFT da la TGF de la señal, ¿por qué necesitamos el tren de ondas transformar. El problema implícita de la STFT no es evidente en el ejemplo anterior. Por supuesto, una ejemplo que funcionaría muy bien fue elegido con el propósito de demostrar el concepto.

El problema con la STFT es el hecho de cuyas raíces se remontan a lo que se conoce como el de Heisenberg Principio de incertidumbre . Este principio aplicado originalmente a la cantidad de movimiento y la ubicación de partículas en movimiento, se puede aplicar a la información de tiempo-frecuencia de una señal. Simplemente, este principio establece que no se puede conocer la representación tiempo-frecuencia exacta de una señal, es decir, no se puede saben lo que existen componentes espectrales en qué casos de veces. Lo que uno puede saber son la intervalos de tiempo en el que cierta banda de frecuencias existen, que es una resolución de problemas.

El problema con la STFT tiene algo que ver con el ancho de la función de ventana que está usado. Para ser técnicamente correcto, esta anchura de la función de ventana se conoce como el apoyo de la ventana. Si la función de ventana es estrecha, de lo que se conoce como modo compacto soportado . Esta terminología se utiliza más a menudo en el mundo wavelet, como veremos más adelante.

Esto es lo que sucede:

Recordemos que en el TF no hay ningún problema de resolución en el dominio de la frecuencia, es decir, sabemos exactamente lo que existen frecuencias; Del mismo modo que no hay ningún problema el tiempo de resolución en el tiempo de dominio, ya que sabemos el valor de la señal en cada instante de tiempo. A la inversa, el tiempo de resolución en el TF, y la resolución de frecuencia en el dominio del tiempo son cero, ya que no tenemos información sobre ellos. Lo que da la resolución de frecuencia perfecta en el TF es el hecho de que la ventana que se utiliza en el FT es su núcleo, el exp {} jwt función, que dura todo el tiempo desde menos infinito a más infinito. Ahora, en la STFT, la ventana es de longitud finita, por lo que sólo cubre una porción de la señal, lo que hace que la resolución de frecuencia para obtener más pobre. Lo que quiero decir con cada vez más pobres es que, ya no sabemos los componentes de frecuencia exactas que existen en la señal, pero sólo conocemos una banda de frecuencias que existe: En TF, la función del núcleo, que nos permite obtener una resolución de frecuencia perfecta, porque el núcleo en sí es una ventana de longitud infinita.

En STFT es la ventana es de longitud finita, y ya no tienen una resolución de frecuencia perfecta. Usted puede preguntar, ¿por qué no hacemos la longitud de la ventana de la STFT infinito, al igual como lo es en el TF, para conseguir una resolución de frecuencia perfecta? Bueno, lo que toda la información en tiempo flojo, que, básicamente, acabar con el TF en lugar de STFT. Para hacer una larga verdadera historia corta, nos encontramos con el siguiente dilema:

Si usamos una ventana de longitud infinita, obtenemos el TF, lo que da una resolución de frecuencia perfecta, pero no hay información de tiempo. Por otra parte, con el fin de obtener el estacionariedad, tenemos que tener un corto suficiente ventana, en el que la señal es estacionaria. Cuanto más estrecho hacemos la ventana, el mejor la resolución de tiempo, y mejor el supuesto de estacionariedad, pero más pobre es la resolución de frecuencia:

estrecha ventana ===> Resolución de buen tiempo, la mala resolución de frecuencia.

amplia ventana ===> Resolución buena frecuencia, la mala resolución temporal.

Con el fin de ver a estos efectos, vamos a ver un par de ejemplos: Voy a mostrar cuatro ventanas de diferente longitud, y vamos a utilizar éstos para calcular la STFT, y ver lo que sucede:

La función de ventana que utilizamos es simplemente una función de Gauss en la forma:

$$w(t) = e^{-a(t^2/2)}$$

donde a determina la longitud de la ventana, y t es el tiempo. La siguiente figura muestra cuatro funciones de ventana de diferentes regiones de apoyo, determinados por el valor de una . Favor de ignorar los valores numéricos de una desde el intervalo de tiempo en que se calcula esta función también determina la función. Sólo tenga en

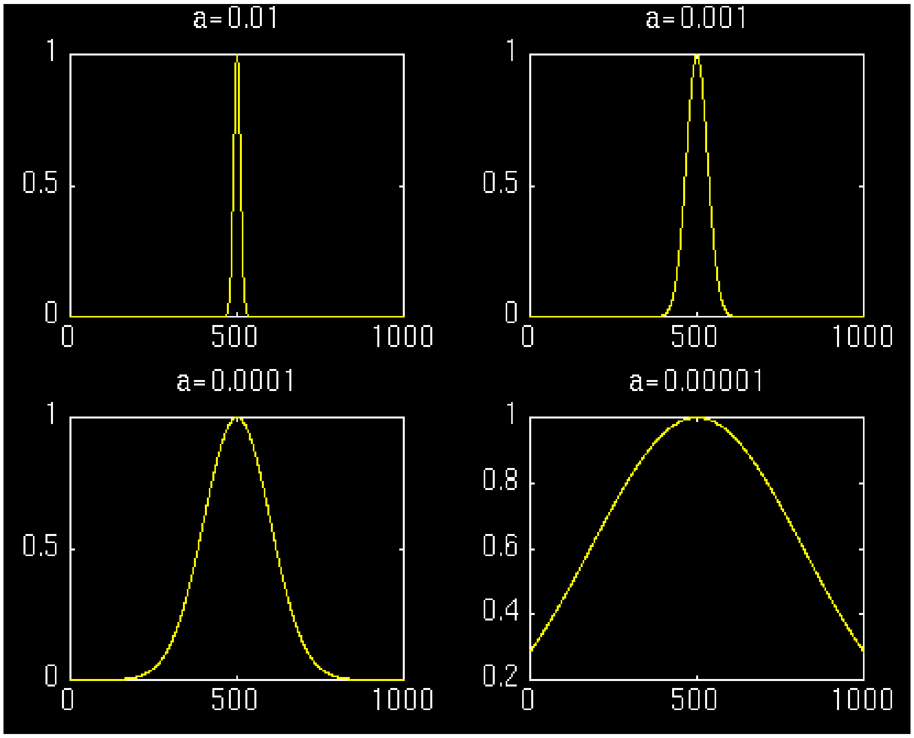


Figure 19: Diferentes ventanas - misma señal

Figure 20: Ventana mas estrecha

cuenta la longitud de cada ventana. El ejemplo anterior dado se calculó con el segundo valor, $a = 0.001$. Ahora voy a mostrar la STFT de la misma señal dada anteriormente calculado con las otras ventanas.

En primer lugar vamos a ver la primera ventana más estrecha. Esperamos que el STFT que tiene un muy buen momento resolución, pero relativamente pobre resolución de frecuencia:

La figura anterior muestra esta STFT. La figura se muestra desde una vista de pájaro de la parte superior con un ángulo para una mejor interpretación. Tenga en cuenta que los cuatro picos están bien separadas unas de otras en el tiempo. también Obsérvese que, en el dominio de frecuencia, cada pico cubre una gama de frecuencias, en lugar de un solo valor de frecuencia. Ahora vamos a hacer la ventana más amplia, y un vistazo a la tercera ventana (la segunda uno ya se mostró en el primer ejemplo).

Tenga en cuenta que los picos no están bien separadas unas de otras en el tiempo, a diferencia del caso anterior, Sin embargo, en el dominio de la frecuencia la resolución

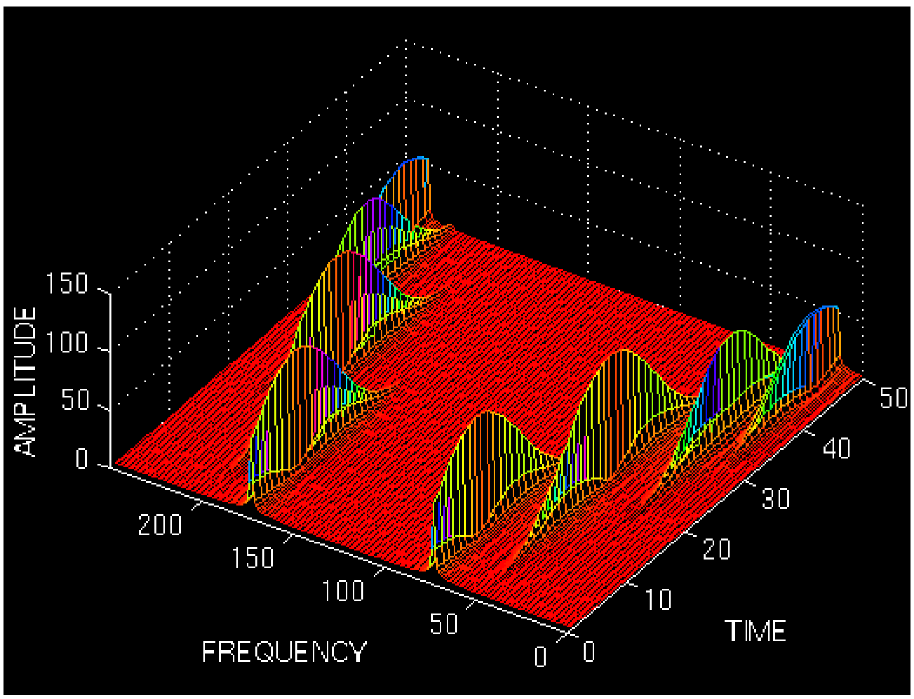


Figure 21: STFT con la ventana mas estrecha

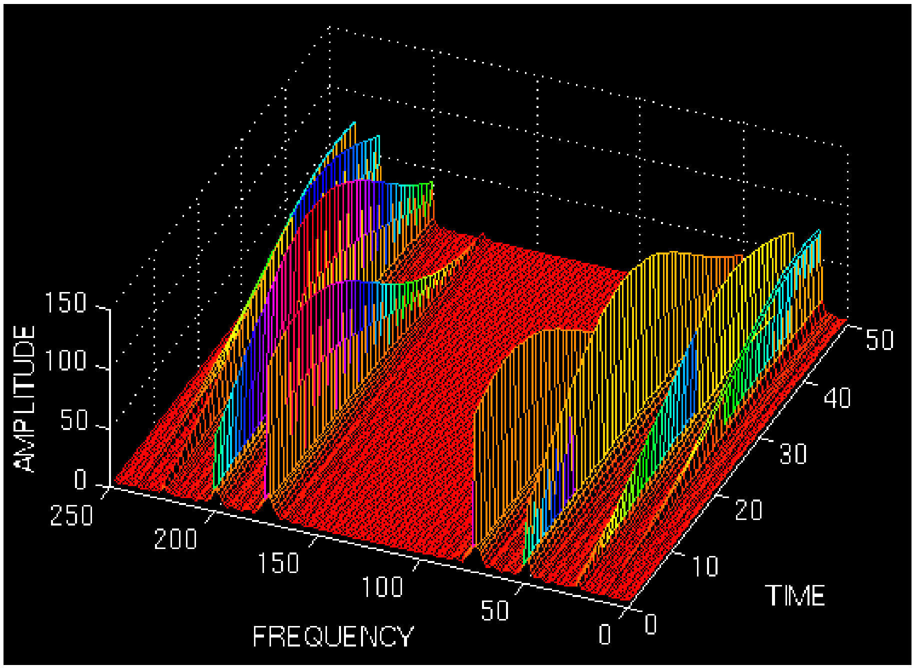


Figure 22: STFT con ventana mas amplia

es mucho mejor. Ahora vamos a aumentar aún más el ancho de la ventana, y ver lo que sucede:

Bueno, esto debe ser de ninguna sorpresa para nadie ahora, ya que es de esperar una terrible (y me refiero absolutamente terrible) resolución de tiempo.

Estos ejemplos han ilustrado el problema implícito de la resolución de la STFT. Nadie que le gustaría usar el STFT se enfrenta a este problema de la resolución.

¿Qué clase de ventana para ¿utilizar? Ventanas estrechos proporciona una excelente resolución temporal, pero pobre resolución de frecuencia. amplias ventanas dar una buena resolución de frecuencia, pero pobre resolución en el tiempo; Por otra parte, las ventanas grandes pueden violar la condición de estacionariedad. El problema, por supuesto, es el resultado de la elección de una ventana función, una vez y para todos, y el uso de esa ventana en todo el análisis. La respuesta, por supuesto, es depende de la aplicación: Si los componentes de frecuencia están bien separados unos de otros en el señal original, entonces podemos sacrificar algo de resolución de frecuencia e ir por una buena resolución en el tiempo, ya que los componentes espectrales ya están bien separados unos de otros. Sin embargo, si esto no es el caso, entonces una buena función de ventana, podría ser más difícil que encontrar un buen stock en el cual invertir.

A estas alturas, usted debe haber dado cuenta de la transformada wavelet entra en

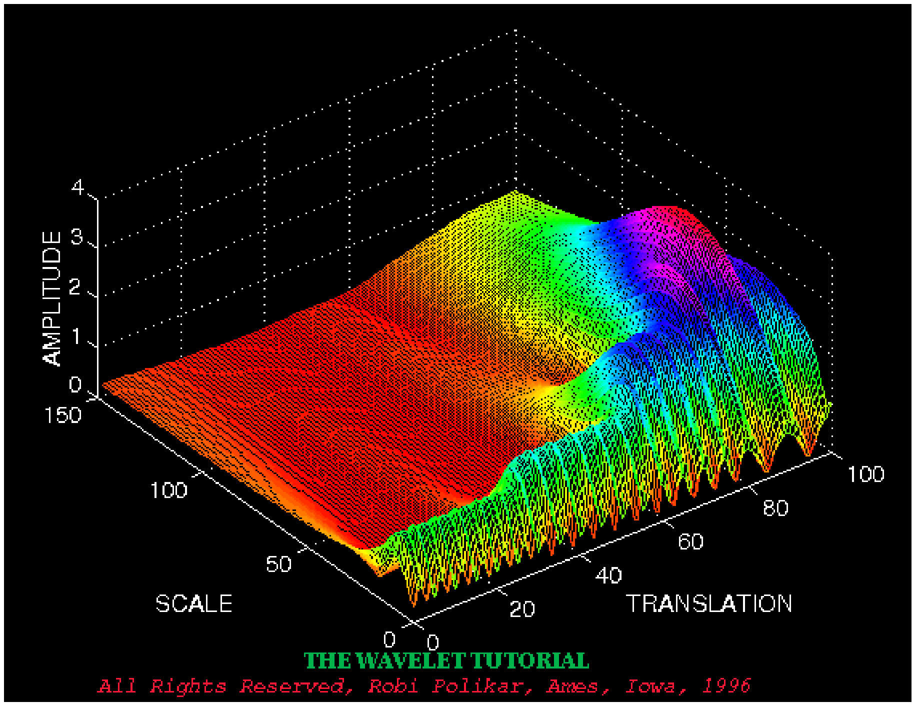


Figure 23

juego. el Wavelet transformar (WT) resuelve el dilema de la resolución, hasta cierto punto, como veremos en el siguiente parte.

Con esto se completa la segunda parte de este tutorial. La transformada wavelet continua es el tema de la Parte III de este tutorial. Si usted no tuvo mucho problema en llegar hasta aquí, y lo que ha sido escrito arriba tiene sentido para ti, que ahora está listo para tomar el último desafío en la comprensión de los conceptos básicos de la teoría de wavelets.

El tutorial WAVELET PARTE III

ANÁLISIS multirresolución

A pesar de los problemas de tiempo y resolución de frecuencia son el resultado de un fenómeno físico (el Heisenberg principio de incertidumbre) y existen independientemente de la transformación utilizado, es posible analizar cualquier señal mediante el uso de un enfoque alternativo llamado el análisis multirresolución (MRA multiresolution analysis). MRA, como implica su nombre, analiza la señal a diferentes frecuencias

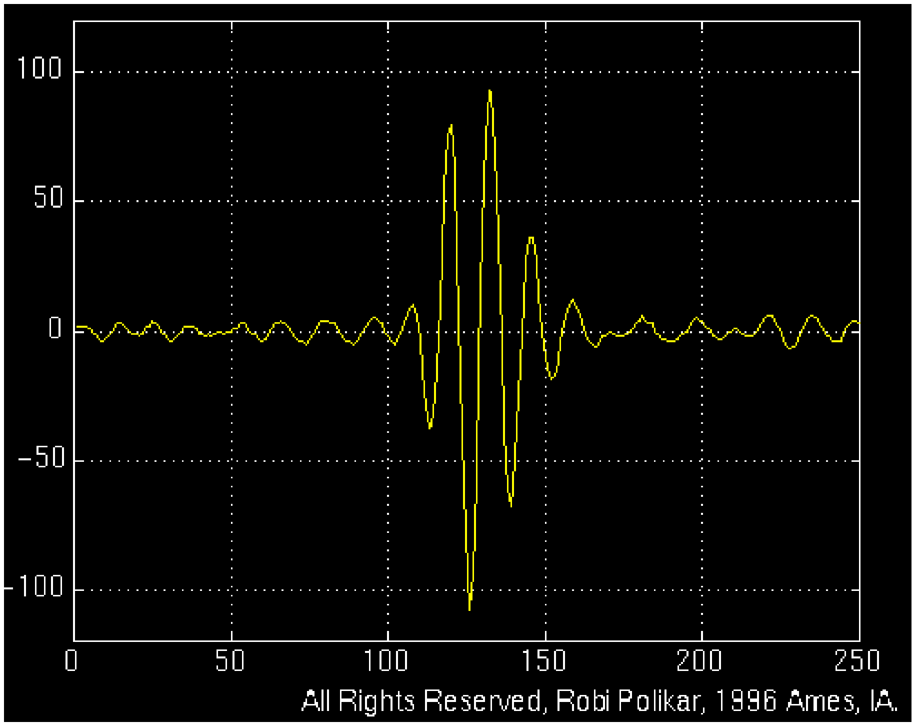


Figure 24

con diferentes resoluciones. Cada componente espectral no se resuelve por igual como fue el caso en la STFT.

MRAestá diseñado para dar una buena resolución en el tiempo y la mala resolución de frecuencia a frecuencias altas y una buena resolución de frecuencia y la mala resolución de tiempo a bajas frecuencias. Este enfoque hace sentido especialmente cuando la señal a la mano tiene componentes de alta frecuencia de corta duración y componentes de frecuencia bajas para largos períodos de tiempo. Afortunadamente, las señales que se encuentran en aplicaciones prácticas son a menudo de este tipo. Por ejemplo, a continuación se muestra una señal de este tipo. Tiene un componente de frecuencia relativamente baja a lo largo de toda la señal y relativamente alto componentes de frecuencia para una corta duración en algún lugar del medio.

La transformada wavelet continua

La transformada wavelet continua se desarrolló como un enfoque alternativo para el corto tiempo Transformada de Fourier para superar el problema de la resolución. El análisis wavelet se realiza en un similares camino a la STFT análisis, en el sentido de que la señal se multiplica por una función, {\ que la wavelet}, similar a la función ventana en la STFT y la transformación se calculan por separado para diferentes segmentos de la señal de dominio de tiempo. Sin embargo, hay dos diferencias principales entre la STFT y la CWT:

1. Las transformadas de Fourier de las señales de ventana no se toman, y por lo tanto pico sola voluntad verse correspondiente a una sinusoide, es decir, frecuencias negativas no se calculan.

2. La anchura de la ventana se cambia como la transformada se calcula para cada espectral componente, que es probablemente la característica más importante de la transformada wavelet.

La transformada wavelet continua se define como sigue

$$CWT_x^{\psi}(\tau, s) = \Psi_x^{\psi}(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int x(t)\psi^* \left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt$$

Ecuación 3.1

Como se ve en la ecuación anterior, la señal transformada es una función de dos variables, tau y s , los de traducción y escala parámetros, respectivamente. psi (t) es la función de transformación, y es denominada wavelet madre . El término wavelet madre recibe su nombre debido a dos importantes propiedades del análisis wavelet tal como se explica a continuación: El término wavelet significa una pequeña onda . La pequeñez se refiere a la condición de que esta (ventana) función es de longitud finita (compacta soportado). La onda se refiere a la condición de que esta función es oscilatorio.

El término madre implica que las funciones con diferentes regiones de apoyo que se utilizan en el proceso de transformación se deriva de una función principal, o el wavelet madre. En otras palabras, la wavelet madre es un prototipo para la generación de la otra funciones de la ventana.

El término *translación* se utiliza en el mismo sentido que se utilizó en la STFT; que está relacionada con la ubicación de la ventana, ya que la ventana se desplaza a través de la señal. Este término, obviamente, corresponde a la información de tiempo en el dominio de la transformada. Sin embargo, no tenemos una frecuencia parámetro, ya que teníamos antes de la STFT. En su lugar, tenemos parámetro de escala que se define como $1/frecuencia$. El término frecuencia se reserva para la STFT. Escala se describe con más detalle en la siguiente sección.

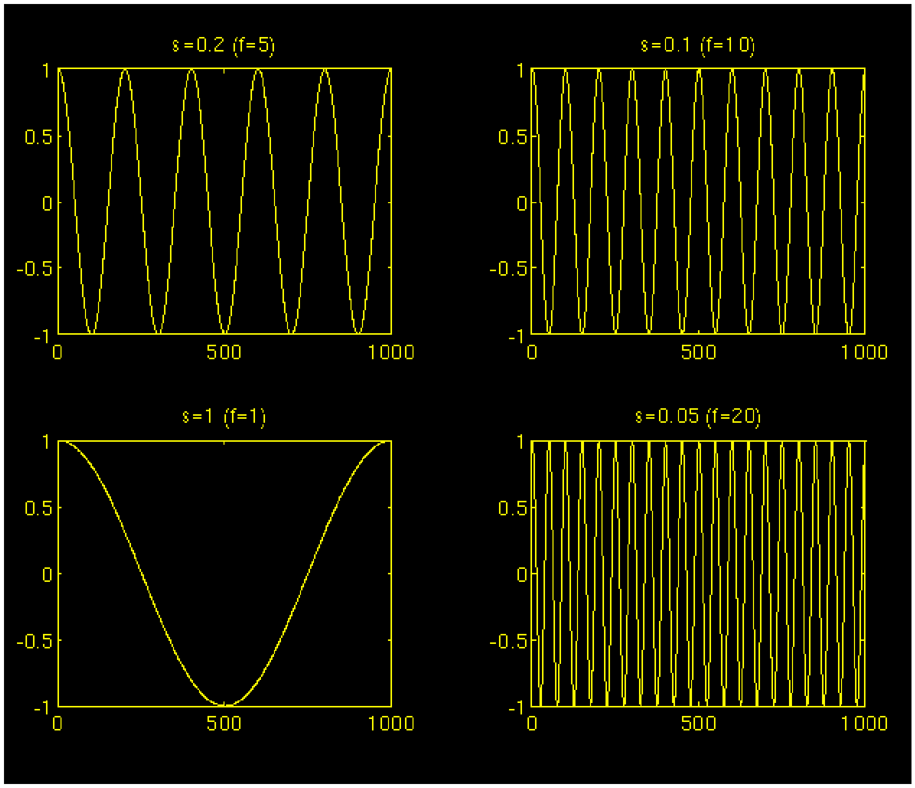


Figure 25: Ejemplos de señales de coseno a diferentes escalas

LA ESCALA

El parámetro *escala* en el análisis wavelet es similar a la escala utilizada en mapas. Al igual que en el caso de mapas, escalas altos corresponden a una visión global no detallada (de la señal), y las escalas bajas corresponden a una vista detallada. Del mismo modo, en términos de frecuencia, las frecuencias bajas (escalas altas) corresponder a una información global de una señal (que por lo general se extiende por toda la señal), mientras que alta frecuencias (escalas bajas) corresponden a una información detallada de un patrón oculto en la señal de (Que por lo general dura un tiempo relativamente corto). señales de coseno correspondientes a varias escalas son dado como ejemplos en la siguiente figura.

Afortunadamente, en aplicaciones prácticas, las escalas bajas (altas frecuencias) no duran para toda la duración de la señal, a diferencia de los que se muestran en la figura, pero por lo general aparecen de vez en cuando como ráfagas cortas, o picos. escalas altas frecuencias (bajas) por lo general duran para toda la duración de la señal.

Escalado, como una operación matemática, ya sea dilata o comprime una señal. escalas mayores corresponden a las señales dilatadas (o estiradas) y escalas pequeñas corresponden a comprimido señales. Todas las señales dadas en la figura se derivan de la misma señal coseno, es decir, son versiones dilatados o comprimidas de la misma función. En la figura anterior, $s = 0.05$ es el escala más pequeña, y $s = 1$ es la escala más grande.

En términos de funciones matemáticas, si $f(t)$ es una función dada, $f(st)$ corresponde a una contraído (comprimido) versión de $f(t)$ si $s > 1$ y a una versión ampliada (dilatada) de $f(t)$ si $s < 0.1$. Sin embargo, en la definición de la transformada wavelet, el término escalar se utiliza en el denominador, y por lo tanto, lo contrario de las declaraciones anteriores se mantiene, es decir, las escalas de $s > 1$ dilata las señales mientras escalas $s < 1$, comprime la señal. Esta interpretación de la escala se utilizará en todo este texto.

CÁLCULO DE LA CWT

Interpretación de la ecuación anterior se explicará en esta sección. Deje $x(t))$ es la señal para ser analizado. La wavelet madre es elegido para servir como prototipo para todas las ventanas en el proceso. Todas las ventanas que se utilizan son las dilatadas (o comprimidos) y versiones desplazadas de la madre wavelet. Hay una serie de funciones que se utilizan para este propósito. El tren de ondas de Morlet y la función de sombrero mejicano son dos candidatos, y se utilizan para el análisis wavelet de la ejemplos que se presentan más adelante en este capítulo.

Una vez que la wavelet madre se elige el cálculo comienza con $s = 1$ y el tren de ondas continuas transformada se calcula para todos los valores de s , más pequeño y más grande que “1”. Sin embargo, dependiendo de la señal, una transformación completa por lo general no es necesario. Para todos los efectos prácticos, las señales son de banda limitada, y por lo tanto, el cálculo de la transformada para un intervalo limitado de escalas es generalmente adecuada. En este estudio, algún intervalo finito de valores de s se utilizaron, como será se describe más adelante en este capítulo.

Para mayor comodidad, el procedimiento se iniciará con escala $s = 1$ y continuará por la aumento de los valores de s, es decir, el análisis se iniciará desde frecuencias altas y proceder hacia bajo frecuencias. Este primer valor de s se corresponderá con el tren de ondas más comprimida. A medida que el valor de s se incrementa, el tren de ondas se dilatará.

La wavelet se coloca al principio de la señal en el punto que corresponde al $tiempo = 0$. La función wavelet a escala “1” se multiplica por la señal y después se integra sobre todo momento . El resultado de la integración se multiplica por la constante de número

$1/\sqrt{s}$. Esta multiplicación es con fines de normalización de energía para que la señal transformada tendrá la misma energía a todas las escalas. El resultado final es el valor de la transformación, es decir, el valor de la transformada wavelet continua en el tiempo cero y escala $s = 1$. En otras palabras, es el valor que corresponde al punto $\tau = 0, s = 1$, en el plano de escala de tiempo.

La wavelet a escala $s = 1$ A continuación, se desplaza hacia la derecha por tau cantidad a la ubicación $t = \tau$, y la ecuación anterior se calcula para obtener el valor transformar en $\tau = 0, s = 1$ en el tiempo- plano de frecuencia.

Este procedimiento se repite hasta que la wavelet alcanza el final de la señal. Una fila de puntos de el plano de escala de tiempo para la escala = s 1 ahora se ha completado. Entonces, s se incrementa en un valor pequeño. Tenga en cuenta que, esta es una transformada continua, y por lo tanto, tanto tau y s se debe incrementar de forma continua. Sin embargo, si esta transformación necesita ser calculado por un ordenador, a continuación, ambos parámetros se incrementan en un tamaño suficientemente pequeño paso . Esto corresponde a muestrear el plano de escala de tiempo.

El procedimiento anterior se repite para cada valor de s. Cada cálculo para un valor dado de s llena la correspondiente fila única del plano de escala de tiempo. Cuando el proceso se haya completado para todos valores deseados de s , el CWT de la señal ha sido calculado.

Las figuras siguientes ilustran todo el proceso paso a paso.

En la figura 26, la señal y la función wavelet se muestran para cuatro valores diferentes de τ. La señal es una versión truncada de la señal mostrada en la Figura 3.1. El valor de la escala es 1, correspondiente a la escala más baja o más alta frecuencia. Tenga en cuenta lo compacto que es (el azul ventana). Debe ser tan estrecho como el componente de frecuencia más alta que existe en la señal. Cuatro lugares distintos de la función wavelet se muestran en la figura de $a = 2$, $a = 40$, $a = 40$, y $a = 140$. En cada ubicación, se multiplica por la señal. Obviamente, el producto sólo es distinto de cero donde la señal cae en la región de apoyo de la wavelet, y es cero en otro lugar. desplazando la wavelet en el tiempo, la señal se localiza en el tiempo, y cambiando el valor de s, la señal es localizada en escala (frecuencia).

Si la señal tiene una componente espectral que corresponde al valor actual de s (que es de 1 en este caso), el producto de la wavelet con la señal en el lugar donde esta espectral componente existe da un valor relativamente grande. Si el componente espectral que corresponde a el valor actual de s no está presente en la señal, el valor del producto será relativamente pequeño, o cero. La señal en la figura 26 tiene componentes espectrales comparables a la anchura de la ventana en $s = 1$ alrededor de $t = 100ms$.

La transformada wavelet continua de la señal en la Figura 26 producirá valores grandes para baja Escalas alrededor de tiempo de 100 ms, y valores pequeños en otros

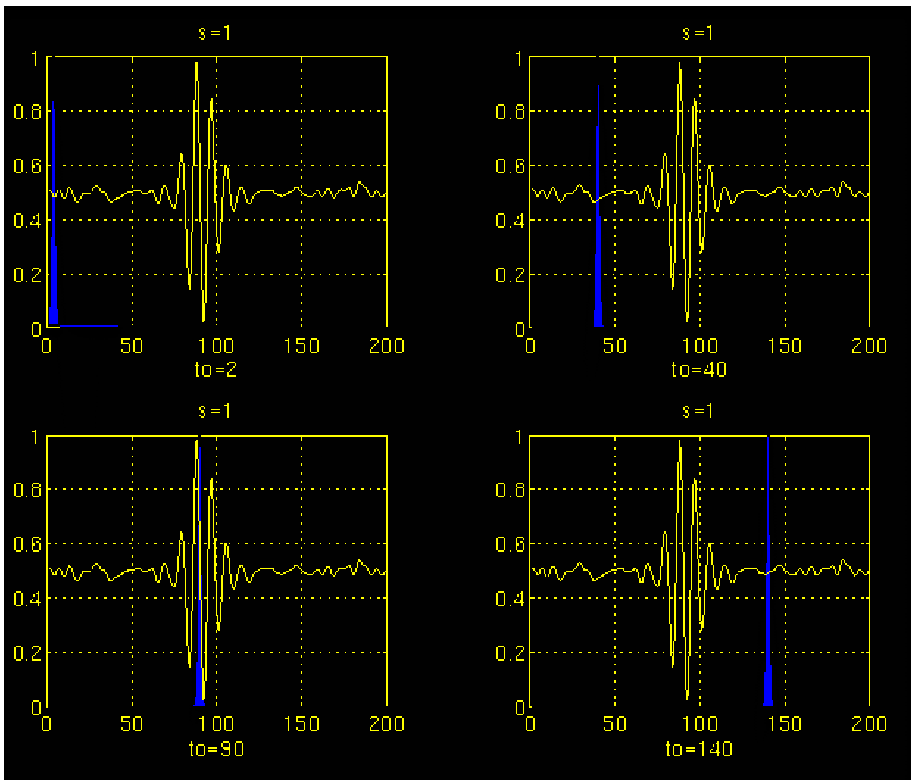


Figure 26: Procedimiento CWT

lugares. Para las escalas altas, por otro lado, la transformada wavelet continua dará valores grandes para casi toda la duración de la señal, ya que existen bajas frecuencias en todo momento.

Las figuras 27 y 28a ilustran el mismo proceso para las escalas de $s = 5$ y $s = 20$, respectivamente. Nota cómo cambia el ancho de la ventana con (frecuencia decreciente) el aumento de escala. Como la ventana aumenta la anchura, la transformación se inicia recogiendo los componentes de frecuencia inferiores.

Como resultado, para cada escala y para cada tiempo (intervalo), un punto del plano de escala de tiempo es calculado. Los cálculos a una escala construyen las filas del plano de escala de tiempo, y el cálculos a diferentes escalas construyen las columnas del plano de escala de tiempo.

Ahora, vamos a echar un vistazo a un ejemplo, y ver cómo la transformada wavelet realmente se parece. Tenga en cuenta la no estacionario de la señal en la Figura 3.6. Esto es similar al ejemplo dado para el STFT, excepto a diferentes frecuencias. Como se indica en la figura, la señal se compone de cuatro componentes de frecuencia a 30 Hz, 20 Hz, 10 Hz y 5 Hz.

Figura 28 es la transformada wavelet continua (CWT) de esta señal. Tenga en cuenta que los ejes son Traducción y la escala, no el tiempo y la frecuencia. Sin embargo, la traducción está estrictamente relacionada con el tiempo, ya que indica donde se encuentra la wavelet madre. La traducción de la wavelet madre puede ser pensado como el tiempo transcurrido desde $t = 0$. La escala, sin embargo, tiene una historia completamente diferente. Recuerde que el parámetro de escala s en la ecuación 3.1 es en realidad la inversa de la frecuencia. En otra Es decir, todo lo que hemos dicho sobre las propiedades de la transformada wavelet con respecto a la frecuencia resolución, inversa de la que aparecerá en las cifras que muestran el WT de la señal de dominio de tiempo.

Tenga en cuenta que en la figura 29 que escalas más pequeñas corresponden a las frecuencias más altas, es decir, la frecuencia disminuye a medida que aumenta la escala, por lo tanto, que parte de la gráfica con las escalas alrededor de cero, en realidad corresponden a frecuencias más altas en el análisis, y que con las escalas altos corresponden a la más baja frecuencias. Recuerde que la señal tenía 30 Hz componentes (frecuencia más alta) primero, y esto aparece en la escala más baja a una traducciones de 0 a 30. Luego viene la 20 componente Hz, segunda frecuencia más alta, y así sucesivamente. El componente 5 Hz aparece al final de eje de traslación (como esperado), y a escalas mayores (frecuencias bajas) de nuevo como se esperaba.

Ahora, recordar estas propiedades de resolución: A diferencia de la STFT, que tiene una resolución constante en toda tiempos y frecuencias, el WT tiene un buen tiempo y la mala resolución de frecuencia en alto frecuencias, y buena frecuencia y la mala resolución de tiempo a bajas frecuencias. Figura 30 muestra el mismo WT en la figura

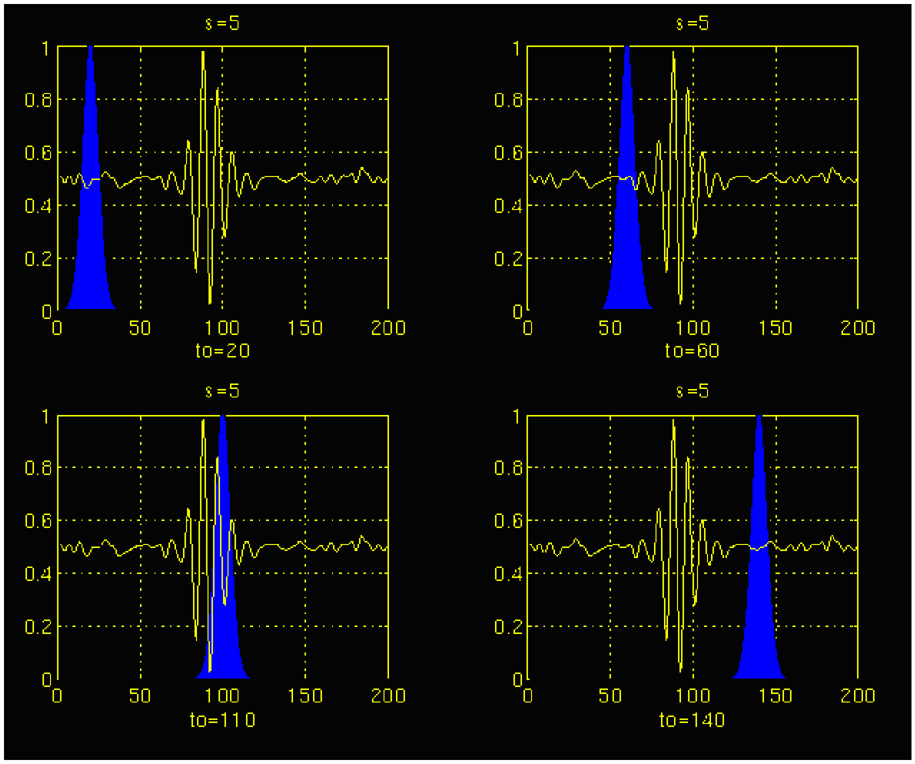
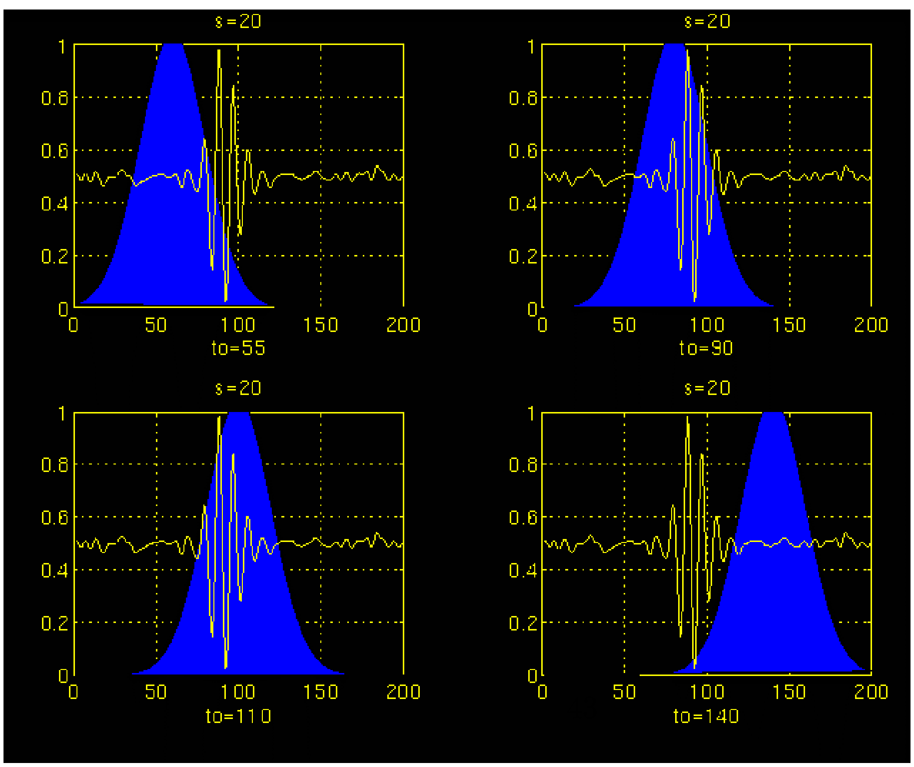


Figure 27: Escala 5



(a) Escala 20

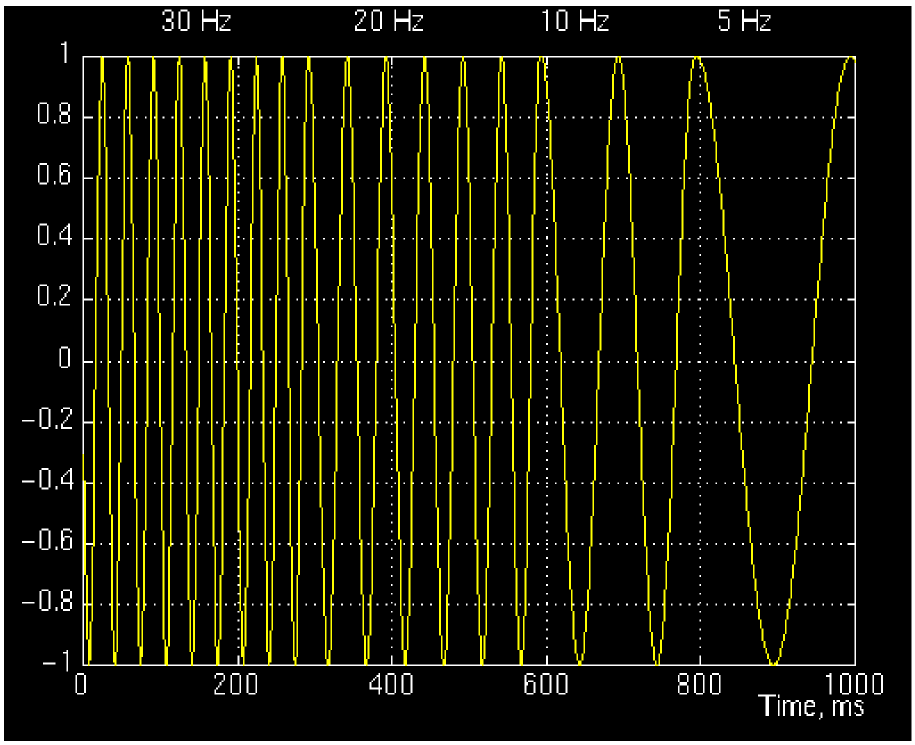


Figure 28: Una señal no-estacionaria

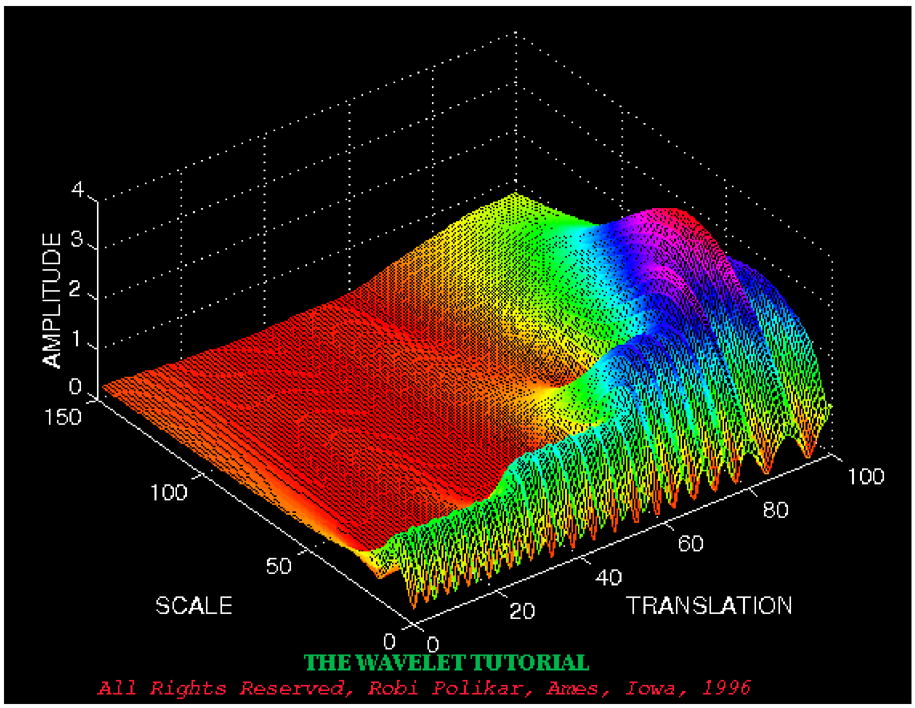


Figure 29: Transformada Wavelet

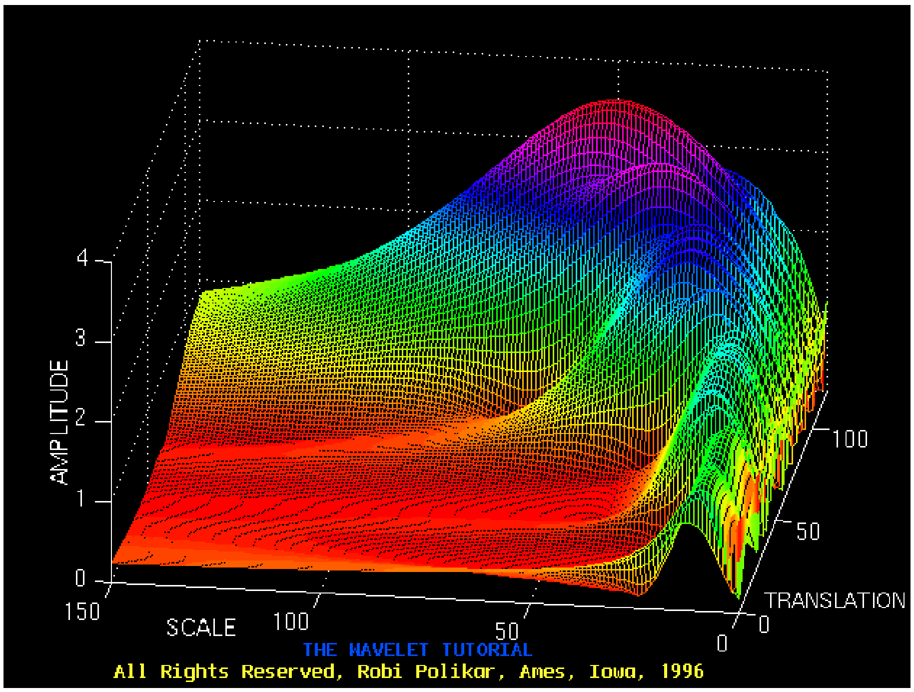


Figure 30: Misma transformada, desde otro ángulo

29 desde otro ángulo para ilustrar mejor las propiedades de resolución: En Figura 29, las escalas inferiores (frecuencias más altas) tienen una mejor resolución de escala (más estrecho en escala, lo que significa que es menos ambiguo lo que el valor exacto de la escala) que corresponden a más pobre resolución de frecuencia . Del mismo modo, las escalas más altas tienen una resolución de frecuencia de escala (más ancho apoyo en la escala, lo que significa que es más ambiciosa que el valor exacto de la escala es), que corresponden a una mejor resolución de frecuencia de frecuencias más bajas.

Los ejes de la figura 29 y 29 están normalizados y deben ser evaluados en consecuencia. Aproximadamente hablando los 100 puntos en el eje de traducción corresponden a 1000 ms, y los 150 puntos de la eje de escala corresponden a una banda de frecuencia de 40 Hz (los números en los eje de traslación y escala no corresponden a segundos y Hz, respectivamente, que son sólo el número de muestras en el cálculo).

Tiempo y frecuencia RESOLUCIONES

En esta sección vamos a echar un vistazo más de cerca a las propiedades de resolución de la transformada wavelet. Recuerde que el problema de la resolución fue la razón principal por la que cambiamos de STFT con WT.

La ilustración de la figura 3.9 se utiliza comúnmente para explicar cómo las resoluciones de tiempo y frecuencia debe ser interpretado. Cada cuadro en la Figura 3.9 corresponde a un valor de la transformada de wavelet en el plano tiempo-frecuencia. Tenga en cuenta que las cajas tienen una cierta distinto de cero zona, lo que implica que la valor de un punto particular en el plano tiempo-frecuencia no puede ser conocido. Todos los puntos de la plano tiempo-frecuencia que cae en una caja están representados por un valor de la WT.

Vamos a echar un vistazo más de cerca a la figura 31: Lo primero a notar es que aunque las anchuras y alturas el cambio de cajas, la zona es constante. Es decir, cada cuadro representa una porción igual de la plano tiempo-frecuencia, pero dando diferentes proporciones a tiempo y frecuencia. Tenga en cuenta que a baja frecuencias, la altura de las cajas son más cortos (que corresponde a una mejor frecuencia resoluciones, ya que hay menos ambigüedad en cuanto al valor de la frecuencia exacta), pero su anchos son más largos (que corresponde a una mala resolución en el tiempo, ya que hay más ambigüedad respecto al valor de la hora exacta). A frecuencias más altas de la anchura de las cajas disminuye, es decir, la resolución de tiempo se pone mejor, y las alturas de las cajas de aumentar, es decir, la frecuencia resolución se empobrece.

Antes de concluir esta sección, vale la pena mencionar la forma en la partición se ve como en el caso de la STFT. Recordemos que en STFT las resoluciones de tiempo y frecuencia están determinadas por la anchura de la ventana de análisis, que se selecciona

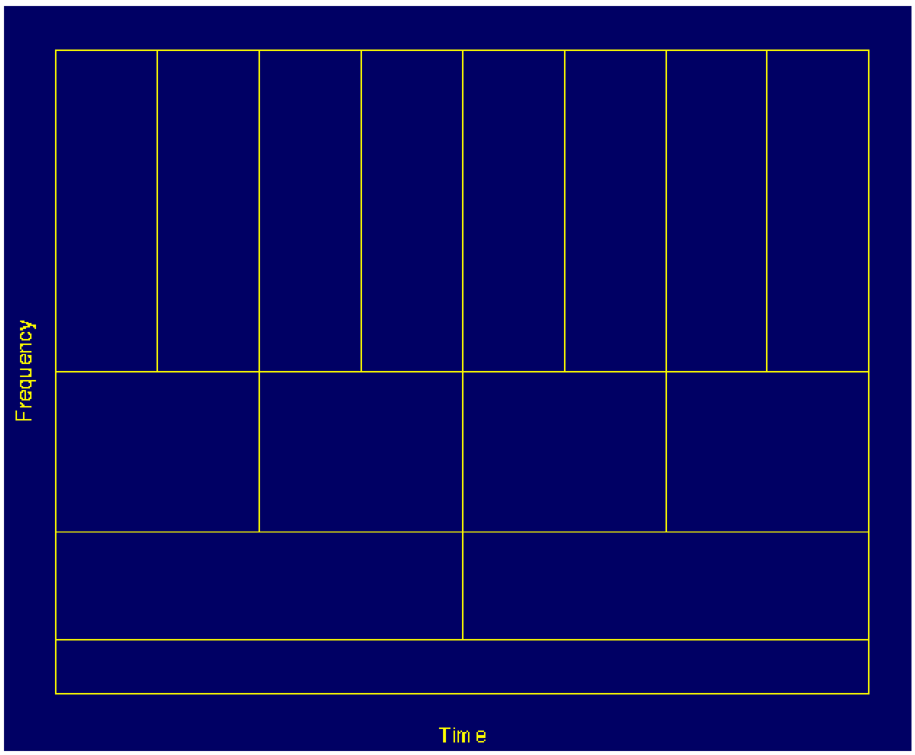


Figure 31: Heisenberg

una vez para todo el análisis, es decir, tanto el tiempo como resoluciones de frecuencia son constantes. Por lo tanto el plano tiempo-frecuencia consta de los cuadrados en la caso STFT.

Independientemente de las dimensiones de las cajas, las áreas de todas las cajas, tanto en STFT y WT, son el misma y determinada por la desigualdad de Heisenberg . A modo de resumen, el área de un rectángulo es fijo para cada función ventana (STFT) o wavelet madre (CWT), mientras que las diferentes ventanas o madre ondas pueden dar lugar a diferentes áreas. Sin embargo, todas las áreas están delimitadas por menor de 1/4 \ pi . Es decir, no podemos reducir las áreas de las cajas tanto como nosotros queremos debido a la incertidumbre de Heisenberg principio. Por otra parte, para una madre wavelet dada las dimensiones de las cajas puede ser cambiado, aunque el área de la misma. Esto es exactamente lo que hace la transformada wavelet.

La teoría WAVELET: un enfoque matemático

En esta sección se describe la idea principal de la teoría de análisis wavelet, que también puede ser considerado ser el concepto subyacente de la mayoría de las técnicas de análisis de señales. El FT definido por Fourier utilizar funciones de base para analizar y reconstruir una función. Cada vector en un espacio vectorial puede ser escrita como una combinación lineal de los vectores de la base en que el espacio vectorial , es decir, por multiplicando los vectores por algunos números constantes y, a continuación tomando la suma de la productos. El análisis de la señal implica la estimación de estos números constantes (transformada coeficientes de Fourier, o coeficientes, coeficientes de onda, etc.).

La síntesis, o la reconstrucción, corresponde al cálculo de la ecuación combinación lineal. Todas las definiciones y teoremas relacionados con este tema se pueden encontrar en el libro de Keiser, A Friendly Guide to Wavelets sino un conocimiento de nivel introductorio de cómo las funciones de base de trabajo es necesarias para comprender los principios básicos de la teoría de wavelets. Por lo tanto, este información será presentada en esta sección.

Funciones base

Nota: La mayoría de las ecuaciones incluyen las letras del alfabeto griego. Estas cartas se escriben explícitamente en el texto con sus nombres, tales como tau, psi, phi etc. Para letras mayúsculas, la primera letra del nombre se ha capitalizado, tal como, Tau, Psi, Phi etc. También, los subíndices se muestran por el carácter de subrayado _ , y superíndices se muestran por el ^ carácter. También tenga en cuenta que todas las cartas o nombres de las letras escritas en letra negrita representan vectores, Algunos puntos importantes también están escritos en negrita, pero el significado debe ser claro por el contexto.

A base de un espacio vectorial V es un conjunto de vectores linealmente independientes, de manera que cualquier vector v en V puede ser escrita como una combinación lineal de estos vectores de la base. Puede haber más de una base para un espacio vectorial. Sin embargo, todos ellos tienen el mismo número de vectores, y este número es conocida como la dimensión del espacio vectorial. Por ejemplo en el espacio de dos dimensiones, la base tendrá dos vectores.

$$v = \Sigma_k \nu^k b_k$$

La ecuación 3.2

Ecuación 3.2 muestra cómo cualquier vector v puede ser escrita como una combinación lineal de los vectores de la base b_k y los coeficientes correspondientes nu ^ k . Este concepto, dada en términos de vectores, fácilmente se puede generalizar a funciones, mediante la sustitución de la vectores de la base b_k con funciones de base phi_k (t), y el vector v con una función f (t). Ecuación 3.2 se convierte entonces

$$f(t) = \Sigma_k \mu_k \phi_k(t)$$

3.2a ecuación

Las complejas exponenciales (senos y cosenos) funciones son las funciones de base para el FT. Además, son funciones ortogonales, que proporcionan algunas propiedades deseables para reconstrucción. Sea $f(t)$ y $g(t)$ sean dos funciones en $L^2[a,b], L^2[a,b]$ denota el conjunto de cuadrado funciones ntegrables en el intervalo $[a,b]$. El producto interno de dos funciones se define por la ecuación 3.3:

$$< f(t), g(t) >= \int_a^b f(t).g^*(t)dt$$

La ecuación 3.3

De acuerdo con la definición anterior del producto interno, el CWT puede ser pensado como el interior producto de la señal de prueba con la funciones de base psi_ (tau, s) (t):

$$CWT_x^\psi(\tau, s) = \Psi_x^\psi(\tau, s) = \int (x(t).\psi_{\tau,s}^*(t)dt$$

La ecuación 3.4
dónde,

$$\psi_{\tau,s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \frac{t-\tau}{s}$$

La ecuación 3.5

Esta definición de la CWT muestra que el análisis wavelet es una medida de similitud entre las funciones de base (wavelets) y la propia señal. Aquí es la similitud en el sentido de semejante contenido de frecuencia. Los coeficientes de CWT calculados se refieren a la cercanía de la señal a la wavelet en la escala actual .

Esto clarifica aún más la discusión anterior sobre la correlación de la señal con la wavelet a una cierta escala. Si la señal tiene un componente importante de la frecuencia correspondiente a la corriente escala, entonces la wavelet (la función de base) en la escala actual será similares o cerca a la señal en la ubicación particular en que se produce este componente de frecuencia. Por lo tanto, la CWT coeficiente calculado en este punto en el plano de escala de tiempo será un número relativamente grande.

Productos interiores, ortogonalidad, y ortonormalidad

Dos vectores v , w se dice que son ortogonales si su producto interior es igual a cero:

$$< v, w >= \Sigma_n v_n w_n * = 0$$

La ecuación 3.6

Del mismo modo, dos funciones f $ $ y $ $ g se dice que son ortogonales entre sí si su producto interior es cero:

$$< f(t), g(t) >= \int_a^b f(t).g^*(t)dt = 0$$

La ecuación 3.7

Un conjunto de vectores {v_1, v_2, ..., v_n} se dice que es ortonormal , si son pares ortogonales entre sí, y todos tienen longitud “ 1 ”. Esto se puede expresar como:

$$< v_m, w_n >= \delta_{mn}$$

La ecuación 3.8

Del mismo modo, un conjunto de funciones {phi_k (t)}, k = 1,2,3, ..., se dice que es ortonormal si

$$\int_a^b \phi_k(t)\phi_k^*(t)dt = 0k \neq l(orthogonality)$$

La ecuación 3.9 y

$$\int_a^b \{|\phi_k(t)|\}^2 dx = 1$$

La ecuación 3.10
o equivalente

$$\int_a^b \phi_k(t)\phi_k^*(t)dt = \delta_{kl}$$

La ecuación 3.11
donde, delta_ {kl} es el delta de Kronecker función, definida como:

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

La ecuación 3.12
Como se indicó anteriormente, puede haber más de un conjunto de funciones de base (o vectores). Entre ellos, el funciones de base ortonormal (o vectores) son de particular importancia debido a la buena propiedades que ofrecen en la búsqueda de estos coeficientes de análisis. Las bases ortonormales permiten cálculo de estos coeficientes de una manera muy simple y directo con el propiedad de ortogonalidad.

Para bases ortonormales, los coeficientes, mu_k, pueden calcularse como

$$\mu_k =< f, \phi_k >= \int f(t)\phi_k^*(t)dt$$

La ecuación 3.13

y la función f (t), entonces puede ser reconstruida por la Ecuación 3.2_a sustituyendo la mu_k coeficientes. este rendimientos

$$\begin{aligned} f(t) &= \Sigma_k \mu_k \rho_k(t) \\ &= \Sigma_k < f, \phi_k > \phi_k(t) \end{aligned}$$

La ecuación 3.14

bases ortonormales pueden no estar disponibles para cada tipo de aplicación donde un generalizado versión, biortogonales bases se puede utilizar. El término " biortogonal " se refiere a dos bases diferentes los cuales son ortogonales entre sí, pero cada uno no forman un conjunto ortogonal.

En algunas aplicaciones, sin embargo, las bases biorthogonal también pueden no estar disponibles en cuyo caso marcos pueden ser utilizados. Marcos constituyen una parte importante de la teoría de ondas pequeñas, e interesado se recomienda acudir al libro de Kaiser se mencionó anteriormente.

Siguiendo el mismo orden que en el capítulo 2 de la STFT, algunos ejemplos de wavelet continua transformar se presentan a continuación. Las cifras que figuran en los ejemplos fueron generados por un programa de escrita para calcular la CWT.

Antes de terminar esta sección, me gustaría incluir dos ondas madre utilizadas comúnmente en análisis wavelet. La wavelet sombrero mexicano se define como la segunda derivada de la gaussiana función:

$$\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$$

La ecuación 3.15

cual es

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \left(e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} . \left(\frac{t^2}{\sigma^2} - 1 \right) \right)$$

La ecuación 3.16

La wavelet Morlet se define como 3.16A ecuación donde una es un parámetro de modulación, y sigma es el parámetro de escala que afecta a la anchura de la ventana.

$$\omega(t) = e^{iat} . e^{-\frac{t^2}{2\sigma}}$$

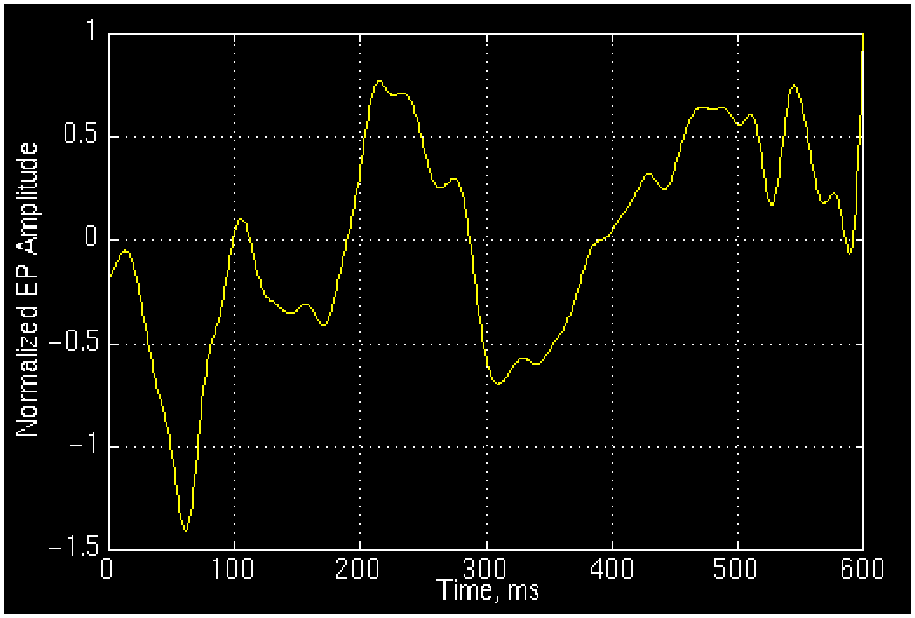


Figure 32: ECG de una persona sana

EJEMPLOS

Todos los ejemplos que se dan a continuación corresponden a la vida real señales no estacionarias. Estas señales se extraen de una señales de base de datos que incluye potenciales relacionados con eventos de la normalidad personas, y los pacientes con enfermedad de Alzheimer. Ya que estos no son a prueba como señales simples sinusoides, no es tan fácil para interpretarlos. Se muestran aquí sólo para dar una idea de cómo Quintales de la vida real parecen.

La siguiente señal mostrada en la Figura 32 pertenece a una persona normal.

y la siguiente es su CWT. Los números en los ejes no son de importancia para nosotros. Aquellos números simplemente muestran que la CWT se ha computado a 350 traducción y 60 lugares en escala el plano de traslación a gran escala. El punto importante a tener en cuenta es el hecho de que el cálculo no es un verdadero continuo WT, como es evidente a partir de la computación en el número finito de ubicaciones. Esta es sólo una versión discretizada de la CWT, que se explica más adelante en esta página. Tenga en cuenta, sin embargo, que esto no es transformada wavelet discreta (DWT), que es el tema de la Parte IV de este tutorial.

y la figura 3.13 representa los mismos transforman desde un ángulo diferente para una mejor visualización.

Figura 35 grafica datos potencialmente relacionados con un caso de un paciente

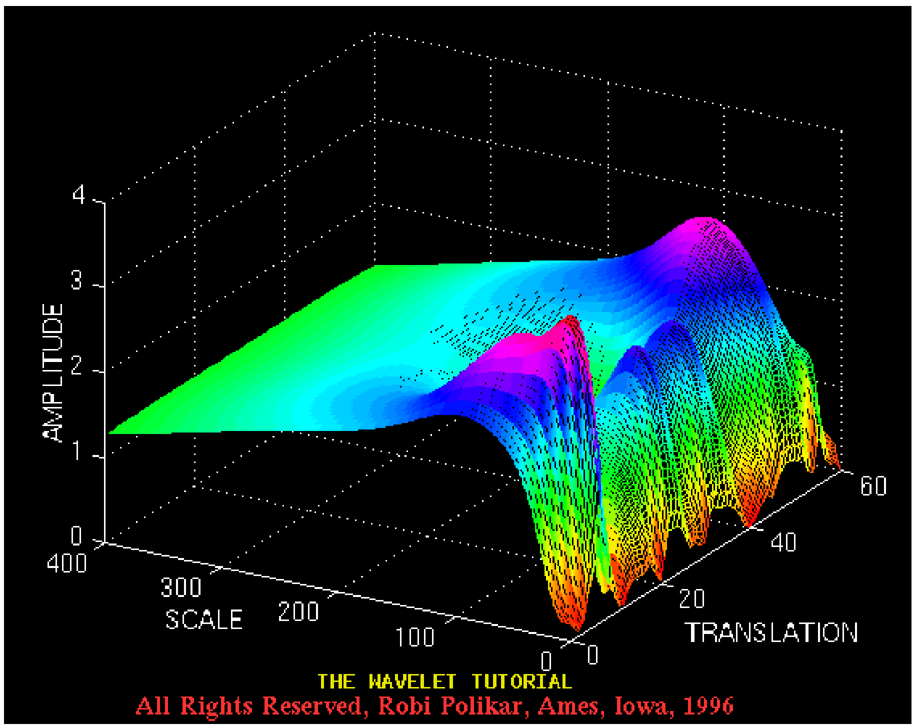


Figure 33: CWT del ECG de una persona sana

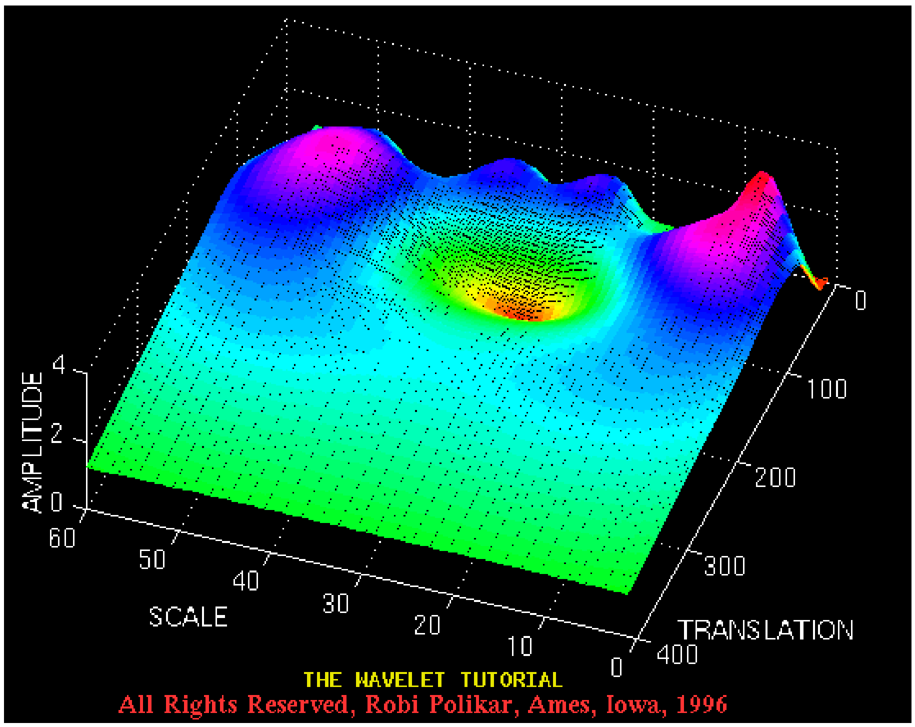


Figure 34: ECG de otro ángulo

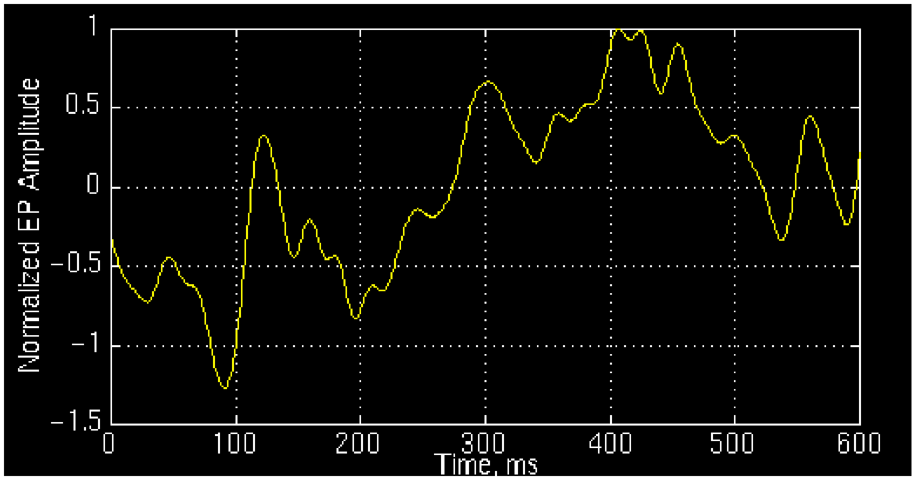


Figure 35: ECG de persona diagnosticada con Alzheimer's

diagnosticado con la enfermedad de Alzheimer

y la Figura 36 ilustra su CWT:

y aquí es otra vista desde un ángulo diferente

LA SÍNTESIS WAVELET

La transformada wavelet continua es una transformación reversible, a condición de que la ecuación 3.18 es satisfecho. Afortunadamente, este es un requisito muy no restrictiva. La wavelet continua transformar es reversible si la ecuación 3.18 se cumple, a pesar de que las funciones de base están en en general no puede ser ortonormal. La reconstrucción es posible mediante el uso de la siguiente fórmula reconstrucción:

$$x(t) = \frac{1}{c_\psi^2} \int\limits_s \int\limits_\tau \Psi_x^\psi(\tau, s) \frac{1}{s^2} \psi \frac{t-\tau}{s} d\tau ds$$

La ecuación 3.17 Transformada wavelet inversa

donde C_psi es una constante que depende de la wavelet utilizado. El éxito de la reconstrucción depende de esta constante llamada, la constante de admisibilidad , a satisfacer la siguiente condición de admisibilidad :

$$c_\psi = \left\{ 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \right\}^{1/2} < \infty$$

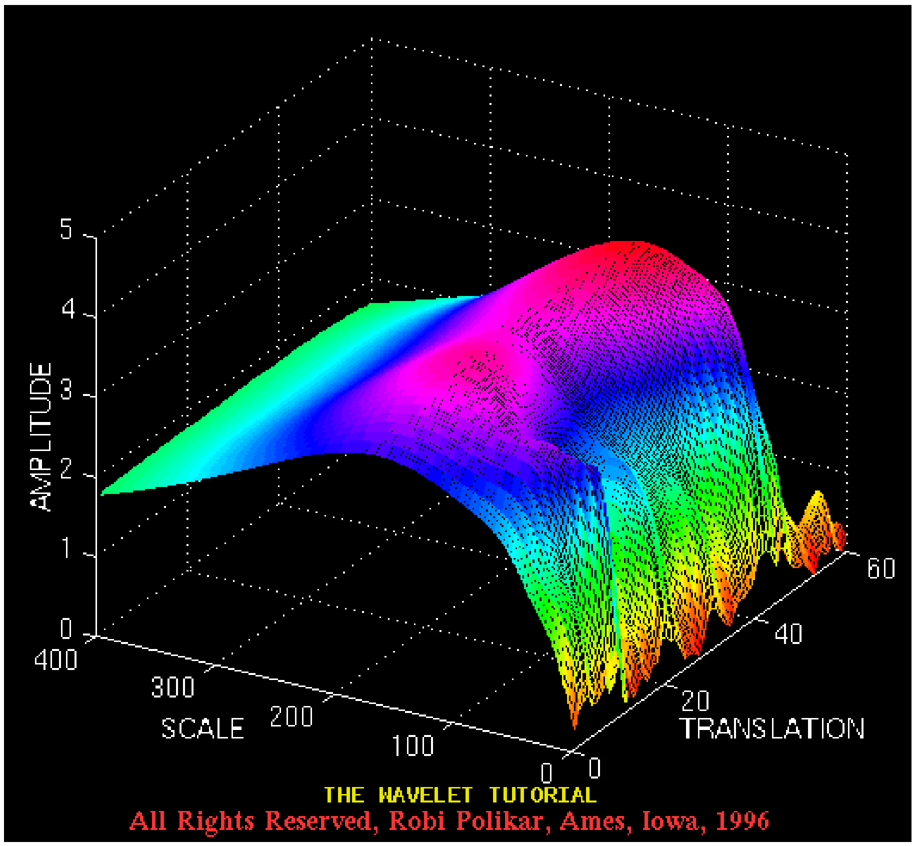


Figure 36: CWT del ECG de una persona enferma

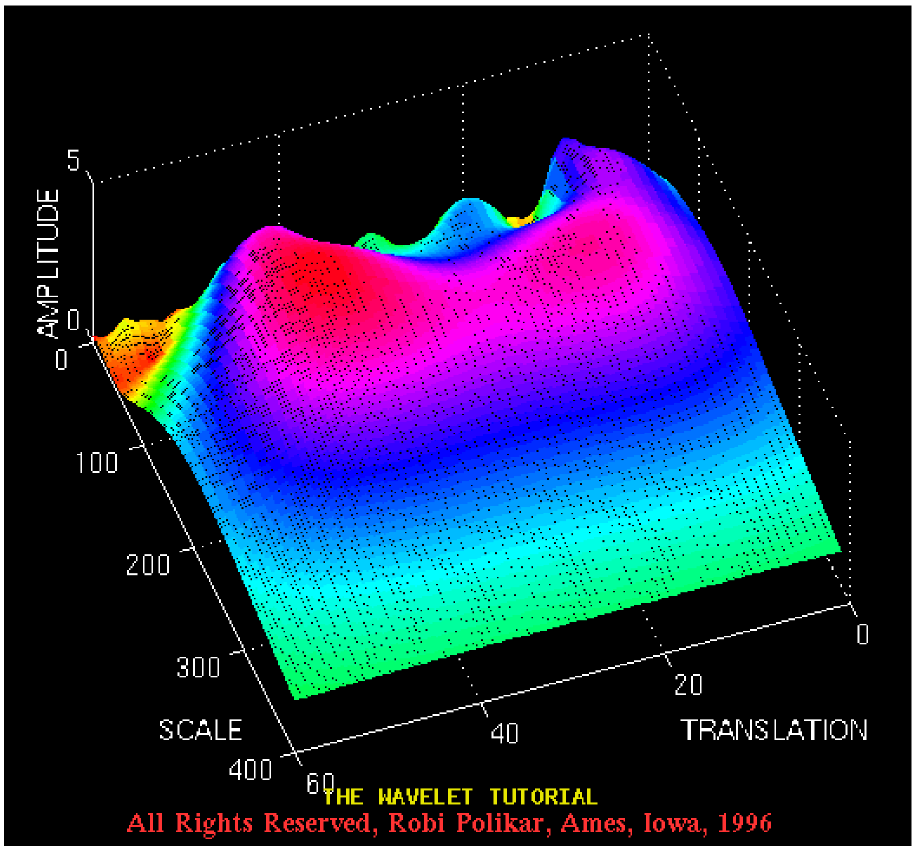


Figure 37: Otra vista del CWT

La ecuación 3.18 admisibilidad

Condición donde psi ^ sombrero (xi) es el FT de psi (t). La ecuación 3.18 implica que psi ^ sombrero (0) = 0, que es

$$\int \psi(t)dt = 0$$

La ecuación 3.19

Como se ha señalado anteriormente, la ecuación 3.19 no es un requisito muy restrictivo ya que muchos wavelet funciones se pueden encontrar cuya integral es cero. Para la ecuación 3.19 para ser satisfecho, el tren de ondas debe ser oscilatorio.

Discretización de la transformada wavelet continua: La serie Wavelet

En el mundo actual, los ordenadores se utilizan para hacer la mayoría de los cálculos (bueno, ... bien ... casi todos cálculos). Es evidente que ni el FT, ni la STFT, ni el CWT pueden ser prácticamente calculado utilizando ecuaciones analíticas, integrales, etc. Es por tanto necesario para discretizar la transforma. Al igual que en el FT y la STFT, la forma más intuitiva de hacer esto es simplemente el muestreo de las tiempo-frecuencia (escala) avión. Una vez más intuitiva, el muestreo de la avión con una velocidad de muestreo uniforme suena como la opción más natural. Sin embargo, en el caso de WT, el cambio de escala se puede utilizar para reducir la velocidad de muestreo.

A escalas superiores (frecuencias bajas), la frecuencia de muestreo se puede disminuir, de acuerdo con Nyquist de regla. En otras palabras, si el plano de escala de tiempo necesita ser muestreado con una velocidad de muestreo de N_1 en escala s_1 , el mismo plano se puede muestrear con una velocidad de muestreo de N_2 , a escala s_2 , donde, s_1 < s_2 (correspondiente a las frecuencias f1> f2) y N_2 < N_1 . La relación real entre N_1 y N_2 es

$$N_2 = \frac{s_1}{s_2} N_1$$

La ecuación 3.20

o

$$N_2 = \frac{f_2}{f_1} N_1$$

La ecuación 3.21

En otras palabras, a frecuencias más bajas la velocidad de muestreo se puede disminuir lo que permitirá ahorrar una una considerable cantidad de tiempo de cálculo. Cabe señalar en este momento, sin embargo, que la discretización se puede hacer de cualquier manera sin ninguna restricción en lo que el análisis de la señal se refiere. Si no se requiere la síntesis, incluso los criterios de Nyquist no tiene que ser satisfecho. Las restricciones a la discretización y la tasa de muestreo a ser importante si, y sólo si, se desea la reconstrucción de la señal. Nyquist tasa de muestreo es la frecuencia de muestreo mínima que permite el original tiempo continuo señal sea reconstruido a partir de sus discretas muestras. Los vectores de la base que se mencionan anteriormente son de especial importancia por esta razón.

Como se mencionó anteriormente, la wavelet psi (tau, s) que satisface la ecuación 3.18, permite la reconstrucción de la señal por la ecuación 3.17. Sin embargo, esto es cierto para la transformada continua. La pregunta es: todavía podemos reconstruir la señal si discretizamos los parámetros de tiempo y la escala? La respuesta es " Sí ", bajo ciertas condiciones (como siempre se dice en comerciales: Se aplican ciertas restricciones !!!). El parámetro de escala s se discretiza primero en una cuadrícula logarítmica.

El parámetro de tiempo es entonces discretizado con respecto al parámetro de escala , es decir, una frecuencia de muestreo diferente se utiliza para cada escala. En otras palabras, el muestreo se realiza en el cuadrícula diádica de muestreo mostrado en la Figura 38:

Piense en el área cubierta por los ejes como todo el plano de escala de tiempo. El CWT asigna un valor a el continuo de puntos en este plano. Por lo tanto, hay un número infinito de CWT coeficientes. Consideremos en primer lugar la discretización del eje escala. Entre ese número infinito de puntos, sólo un número finito se toman, utilizando una regla logarítmica. La base del logaritmo depende del usuario. El valor más común es 2 debido a su conveniencia. Si se elige 2, solamente las escalas 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... etc. se calculan. Si el valor era de 3, las escalas 3, 9, 27, 81, 243, ... etc. habría sido computada. El eje de tiempo se discretiza entonces de acuerdo con el discretización del eje escala. Puesto que los cambios discretos escala por factores de 2 , la frecuencia de muestreo se reduce para el eje de tiempo por un factor de 2 a todas las escalas.

Tenga en cuenta que en la escala más baja (s = 2), sólo 32 puntos del eje de tiempo se toman muestras (por lo particular caso dado en la Figura 3.17). En el valor siguiente escala, S = 4, se reduce la velocidad de muestreo de eje de tiempo en un factor de 2 ya que la escala se incrementa por un factor de 2, y por lo tanto, sólo 16 muestras son tomado. En la siguiente etapa, S = 8 y 8 se toman muestras en el tiempo, y así sucesivamente.

Aunque se le llama el plano tiempo-escala, es más exacto llamarlo la traducción

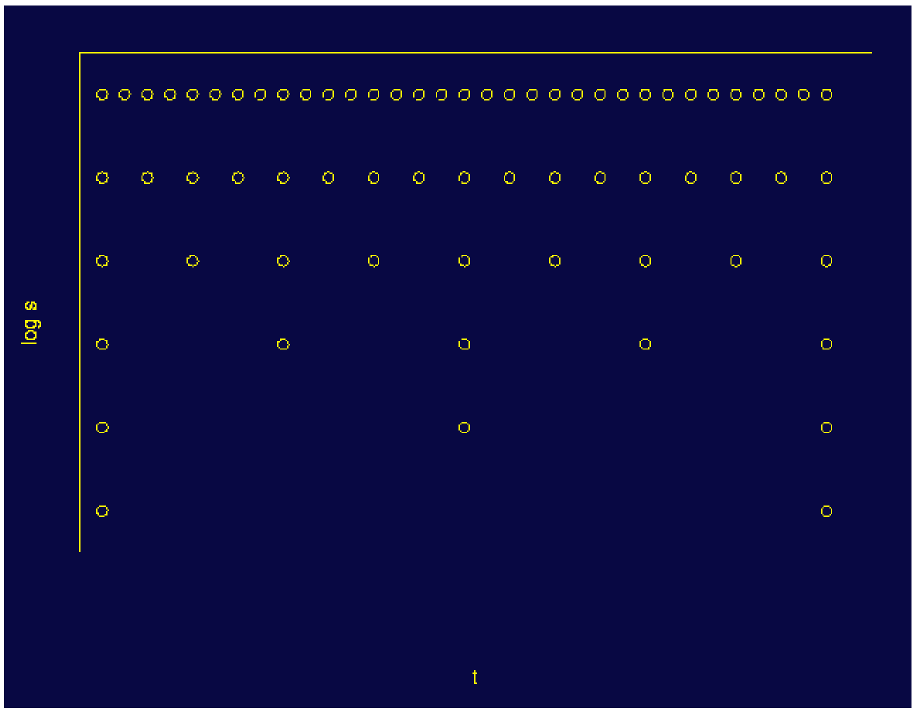


Figure 38: Cuadrícula diádica de muestreo

escala avión, porque " tiempo " en el dominio de la transformada en realidad corresponde al desplazamiento del tren de ondas a tiempo. Para la serie de ondas pequeñas, el tiempo real es todavía continua.

Al igual que en la relación entre Fourier transformada continua, series de Fourier y la discreta transformada de Fourier, hay una transformada wavelet continua, una wavelet semi-transformada discreta (También conocido como series wavelet) y una transformada wavelet discreta.

Expresando el procedimiento de discretización anteriormente en términos matemáticos, la discretización escala es s = S_0 ^ j , y discretización traducción es tau = k.s_0 ^ j.tau_0 donde S_0> 1 y tau_0> 0 . Nota, la forma en la discretización traducción depende de discretización escala con S_0 . La función wavelet continua

$$\psi_{\tau,s} = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$$

La ecuación 3.22

$$\psi_{j,k}(t) = s_0^{-j/2}\psi(s_0^{-j}t - k\tau_0)$$

La ecuación 3.23 mediante la inserción de s = S_0 ^ j , y tau = k.s_0 ^ j.tau_0 .

Si {psi_ (j, k)} constituye una base ortonormal, la serie de transformaciones de ondas se convierte

$$\Psi_x^{\psi_{j,k}} = \int x(t)\psi^*_{j,k}(t)dt$$

La ecuación 3.24

o

$$x(t) = c_\psi \Sigma_j \Sigma_k \Psi_x^{\psi_{j,k}} \psi_{j,k}(t)$$

La ecuación 3.25

Una serie wavelet requiere que {psi_ (j, k)} son o bien ortonormal, biortogonal, o marco. Si {psi_ (j, k)} no son ortonormales, la ecuación 3.24 se convierte

$$\Psi_x^{\psi_{j,k}} = \int x(t)\hat{\psi}(t)dt$$

La ecuación 3.26

donde hat {psi_ {j, k} ^ * (t)} , es o bien la base biorthogonal dual o de doble marco (Tenga en cuenta que * denota el conjugado).

Si {psi_ (j, k)} son ortonormales o biortogonal, la transformación será no redundante, donde como si que forman un marco, el transformar será redundante. Por otro lado, es mucho más fácil encontrar marcos de lo que es encontrar bases ortonormales o biorthogonal.

La siguiente analogía puede aclarar este concepto. Considere todo el proceso como mirando una objeto particular. Los ojos humanos primero determinan la vista aproximada que depende de la distancia de los ojos en el objeto. Esto corresponde a ajustar el parámetro de escala S_0 ^ (- j) . Cuando mirando un objeto muy cerca, con gran detalle, j es negativo y grande (baja escala, de alto frecuencia, analiza el detalle en la señal). Al mover la cabeza (o los ojos) muy lentamente y con incrementos muy pequeños (de ángulo, de la distancia, dependiendo del objeto que está siendo visualizado), corresponde a valores pequeños de tau = k.s_0 ^ j.tau_0 . Tenga en cuenta que cuando j es negativo y grande, corresponde a pequeños cambios en el tiempo, tau , (alta velocidad de muestreo) y grandes cambios en S_0 ^ -j (baja escala, altas frecuencias, donde la frecuencia de muestreo es alta). El parámetro de escala puede ser pensado como ampliación también.

¿Qué tan bajo puede ser la frecuencia de muestreo y aún así permitir la reconstrucción de la señal? Esta es la principal cuestión que se plantea para optimizar el procedimiento. El valor más conveniente (en términos de programación) se encuentra que es “ 2 ” para S_0 y "1" para tau. Obviamente, cuando la tasa de muestreo es obligado a ser tan bajo como sea posible, también se reduce el número de wavelets ortonormales disponibles.

La transformada wavelet continua ejemplos que se dieron en este capítulo eran en realidad el serie wavelet de las señales dadas. Los parámetros fueron elegidos en función de la señal. Ya que no era necesaria la reconstrucción, las frecuencias de muestreo eran a veces muy por debajo del crítico valor donde S_0 varió de 2 a 10, y tau_0 variaban de 2 a 8, para diferentes ejemplos.

Esto concluye la Parte III de este tutorial. Espero que ahora tiene una comprensión básica de lo que el transformada wavelet se trata. Hay una cosa por ser discutido sin embargo. A pesar de discretizado transformada wavelet puede ser calculada en un ordenador, este cálculo puede tardar desde un par de segundos a par de horas dependiendo del tamaño de la señal y la resolución que desee. Un algoritmo increíblemente rápido está realmente disponible para calcular el tren de ondas transformar de una señal. La transformada wavelet discreta (DWT) se introduce en el capítulo final de este tutorial, en la Parte IV.

Nos vemos en la gran final, ¿de acuerdo?

El tutorial WAVELET PARTE IV

¿POR QUÉ LA Transformada Wavelet Discreta NECESITA?

Aunque el tren de ondas continua discretizada transformar permite el cálculo de la transformada wavelet continua por las computadoras, no es un verdadero transformada discreta. Como una cuestión de De hecho, la serie wavelet es simplemente una versión muestreada de la CWT, y la información que proporciona es altamente redundante en cuanto a la reconstrucción de la señal se refiere. Esta redundancia, en Por otro lado, requiere una cantidad significativa de tiempo y recursos de computación. la discreta transformada wavelet (DWT), por el contrario, proporciona información suficiente tanto para el análisis y la síntesis de la señal original, con una reducción significativa en el tiempo de cálculo. El TPM es considerablemente más fácil de implementar si se compara con el CWT. Los conceptos básicos de la DWT se introducirá en esta sección junto con sus propiedades y los algoritmos utilizados para calcularla. Al igual que en los capítulos anteriores, se proporcionan ejemplos para ayudar en la interpretación de la DWT.

LA transformada wavelet discreta (DWT)

Los cimientos de la DWT se remontan a 1976, cuando Croiser, Esteban, y Galand ideó una técnica para descomponer señales de tiempo discreto. Crochiere, Weber y Flanagan hizo un similares trabajar en la codificación de señales de voz en el mismo año. Llamaron a su esquema de análisis, codificación de sub-banda . En 1983, Burt define una técnica muy similar a la codificación subbanda y la llamó codificación piramidal que también se conoce como análisis multirresolución. Más tarde, en 1989, y Vetterli Le Gall hizo algunas mejoras en el esquema de codificación subbanda, la eliminación de la existente redundancia en el sistema de codificación piramidal. codificación en subbandas se explica a continuación. Un detallado la cobertura de la transformada wavelet discreta y teoría del análisis multiresolución puede encontrarse en una serie de artículos y libros que están disponibles en este tema, y está más allá del alcance de este tutorial.

La codificación de subbanda y en el análisis multirresolución

La idea principal es la misma que se encuentra en el CWT. Una representación de escala de tiempo de una señal digital es obtenido utilizando técnicas de filtrado digitales. Recordemos que el CWT es una correlación entre una wavelet a diferentes escalas y la señal con la escala (o la frecuencia) se utilizan como una medida de similitud. La transformada wavelet continua se calculó mediante el cambio de la escala la ventana de análisis, el desplazamiento de la ventana en el tiempo, multiplicando por la señal, e integrando sobre todo el tiempo. En el caso discreto, filtros de diferentes frecuencias de corte se utilizan para analizar la señal de a diferentes escalas. La señal se pasa a través de una serie de filtros de paso alto para analizar el alto frecuencias, y se pasaron a través de una serie de filtros de paso bajo para analizar las frecuencias bajas.

La resolución de la señal, que es una medida de la cantidad de información de detalle en la señal, se cambió por las operaciones de filtrado, y la escala se cambia por muestreo ascendente y submuestreo operaciones (submuestreo). Submuestreo una señal corresponde a la reducción de la la frecuencia de muestreo, o la eliminación de algunas de las muestras de la señal. Por ejemplo, el submuestreo por dos se refiere a dejar caer cada otra muestra de la señal. El submuestreo por un factor n reduce la número de muestras en la señal de n veces.

Muestreo ascendente una señal corresponde al aumento de la tasa de muestreo de una señal mediante la adición de nuevo muestras a la señal. Por ejemplo, muestreo ascendente por dos se refiere a la adición de una nueva muestra, por lo general una cero o un valor interpolado, entre cada dos muestras de la señal. Sobremuestreo de una señal por una factor de de n aumenta el número de muestras en la señal por un factor de n .

Aunque no es la única opción posible, coeficientes DWT son por lo general en la muestra de la CWT en una cuadrícula diádica, es decir, $s_0 = 2$ y $t_0 = 1$, obteniéndose $s = 2^j$ y $t = k.2^j$, Como se describe en la Parte 3. Desde la la señal es una función discreta en el tiempo, los términos funcionan y la secuencia se usarán indistintamente en la siguiente discusión. Esta secuencia se denota por $x[n]$, donde n es un número entero.

El procedimiento se inicia con el paso de esta señal (secuencia) a través de un filtro de paso bajo digital de media banda con respuesta al impulso $h[n]$. Filtrar una señal corresponde a la operación matemática de convolución de la señal con la respuesta al impulso del filtro. La operación de convolución en tiempo discreto se define como sigue:

Un filtro de media banda de paso bajo elimina todas las frecuencias que están por encima de la mitad de la frecuencia más alta en la señal. Por ejemplo, si una señal tiene un máximo de 1.000 componente Hz, entonces la banda media filtrado de paso bajo elimina todas las frecuencias por encima de 500 Hz.

La unidad de frecuencia es de particular importancia en este momento. En señales discretas, la frecuencia es expresado en términos de radianes. En consecuencia, la frecuencia de muestreo de la señal es igual a 2p radianes en términos de frecuencia radial. Por lo tanto, el componente de frecuencia más alta que existe en un señal será p radianes, si la señal es muestreada a velocidad de € ™ s Nyquistâ (que es el doble del máximo frecuencia que existe en la señal); es decir, la tasa de € ™ s Nyquistâ corresponde a p rad / s en el dominio de la frecuencia discreta. Por lo tanto usando Hz no es apropiado para señales discretas. Sin embargo, Hz se utiliza siempre que sea necesario para aclarar una discusión, ya que es muy común pensar en frecuencia en términos de Hz. Siempre hay que recordar que la unidad de frecuencia para la discreta señales de tiempo es radianes.

Después de pasar la señal a través de un filtro de paso bajo de media banda, la mitad de las muestras se puede eliminar de acuerdo con la regla de la € ™ s Nyquistâ, ya que la señal tiene ahora una frecuencia más alta de p / 2 radianes en lugar de radianes p. Simplemente descartando todas las otras muestras se submuestra la señal por dos, y la señal tendrá entonces la mitad el número de puntos. La escala de la señal ahora se duplica. Tenga en cuenta que el filtrado de paso bajo elimina la información de alta frecuencia, pero deja la escala sin alterar. Sólo el proceso de submuestreo cambia la escala. Resolución, por el contrario, es relacionada con la cantidad de información en la señal, y por lo tanto, se ve afectada por el filtrado operaciones. filtrado de media banda de paso bajo elimina medio de las frecuencias, que puede ser interpretado como la pérdida de la mitad de la información. Por lo tanto, la resolución se reduce a la mitad después de la operación de filtrado. Tenga en cuenta, sin embargo, la operación de submuestreo después de la filtración no afecta a la resolución, ya la eliminación de la mitad de los componentes espectrales de la señal hace que la mitad del número de muestras redundante de todos modos. La mitad de las muestras se pueden descartar sin ninguna pérdida de información. En Resumiendo, el filtrado de paso bajo reduce a la mitad la resolución, pero deja sin cambios la escala. La señal luego se submuestreada por 2 ya que la mitad del número de muestras son redundantes.

Esto duplica la escala. Este procedimiento matemáticamente puede expresarse como

Una vez dicho esto, ahora vemos cómo el TPM se calcula realidad: La DWT analiza la la señal en diferentes bandas de frecuencia con diferentes resoluciones por la descomposición de la señal en una aproximación gruesa y la información detallada. DWT emplea dos conjuntos de funciones, llamada escala funciones y funciones wavelet, que se asocian con paso bajo y filtros de paso alto, respectivamente. se obtiene simplemente la descomposición de la señal en diferentes bandas de frecuencia por paso alto sucesiva y filtrado de paso bajo de la señal de dominio del tiempo. La señal original x [n] se hace pasar primero a través de un filtro de media banda de paso alto g [n] y un filtro de paso bajo h [n]. Después de la filtración, la mitad de las muestras puede ser eliminado de acuerdo con la regla de la € ™ s Nyquistâ, ya que la señal tiene ahora una mayor frecuencia de p / 2 radianes en lugar de p. Por tanto, la señal puede ser submuestreada por 2, simplemente descartando cada otra muestra. Esto constituye un nivel de descomposición y lata matemáticamente ser expresada como sigue:

donde y alta [k] e y bajo [k] son las salidas de los filtros de paso alto y de paso bajo, respectivamente, después de submuestreo por 2. Esta descomposición a la mitad el tiempo de resolución, ya que sólo la mitad el número de muestras ahora que caracteriza toda la señal. Sin embargo, esta operación se duplica la resolución de frecuencia, ya la banda de frecuencia de la señal ahora abarca sólo la mitad de la banda de frecuencia anterior, con eficacia reducir la incertidumbre en la frecuencia a la mitad. El procedimiento anterior, que también se conoce como la codificación de sub-banda, se puede repetir para la descomposición adicional. En cada nivel, el filtrado y submuestreo dará lugar a la mitad del número de muestras (y por lo tanto la mitad de la resolución de tiempo) y la mitad de la banda de frecuencia abarcó (y por tanto el doble de la resolución de frecuencia). Figura 4.1 ilustra este procedimiento, donde x [n] es la señal original para ser descompuesto, y h [n] y g [n] son filtros de paso bajo y paso alto, respectivamente. El ancho de banda de la señal en cada nivel es marcado en la figura como "f".

Figura 4.1. El algoritmo de codificación subbanda

Como un ejemplo, supongamos que la señal original x [n] tiene 512 puntos de muestra, que abarca una frecuencia banda de cero a p rad / s. En el primer nivel de descomposición, la señal pasa a través del paso alto y filtros de paso bajo, seguida de submuestreo por 2. La salida del filtro de paso alto tiene 256 puntos (por lo tanto la mitad de la resolución de tiempo), pero sólo se extiende por el frecuencias p / 2 a P rad / s (de ahí el doble de la resolución de frecuencia). Estas 256 muestras constituyen el primer nivel de DWT coeficientes. La salida del filtro de paso bajo también tiene 256 muestras, pero se extiende por la otra mitad de la banda de frecuencias, las frecuencias de 0 a p / 2 rad / s. Esta señal se hace pasar entonces a través de la misma filtros pasa alto y pasa por la descomposición adicional. La salida del segundo filtro de paso bajo seguido de submuestreo tiene 128 muestras que abarcan una banda de frecuencia de 0 a P / 4 rad / s, y el salida del segundo filtro de paso alto seguido por submuestreo tiene 128 muestras que abarcan una banda de frecuencia de P / 4 a P / 2 rad / s. El segundo paso alto filtra la señal constituye la segunda nivel de coeficientes DWT. Esta señal tiene la mitad de la resolución en el tiempo, pero el doble de la frecuencia Resolución de la primera señal de nivel. En otras palabras, la resolución de tiempo se ha reducido por un factor de 4, y resolución de frecuencia se ha incrementado en un factor de 4 en comparación con la señal original. los salida del filtro de paso bajo se filtra a continuación una vez más por la descomposición adicional. Este proceso continúa hasta que se dejan dos muestras. Para este ejemplo específico no habría 8 niveles de descomposición, teniendo cada uno la mitad del número de muestras del nivel anterior. La DWT de la señal original es a continuación, obtenido mediante la concatenación de todos los coeficientes a partir de la última nivel de descomposición (Restantes dos muestras, en este caso). La DWT entonces tendrá el mismo número de coeficientes como la señal original.

Las frecuencias que son más prominentes en la señal original aparecerán como grandes amplitudes en esa región de la señal de DWT que incluye esas frecuencias particulares. La diferencia de esta transformar de la transformada de Fourier es que la localización temporal de estas frecuencias no será perdió. Sin embargo, la localización de tiempo tendrá una resolución que depende de qué nivel Aparecer. Si la información principal de la señal se encuentra en las altas frecuencias, como ocurre con mayor frecuencia, la localización de tiempo de estas frecuencias será más precisa, ya que se caracterizan por más número de muestras. Si la información principal radica solamente en las frecuencias muy bajas, el tiempo localización no será muy precisa, ya que algunas muestras se utilizan para expresar la señal en estos frecuencias. Este procedimiento, en efecto, ofrece una buena resolución temporal a altas frecuencias, y el buen resolución de frecuencia a frecuencias bajas. La mayoría de las señales prácticos encontrados son de este tipo.

Las bandas de frecuencia que no son muy prominentes en la señal original tendrán muy baja amplitudes, y que parte de la señal DWT se pueden descartar sin ninguna pérdida importante de información, lo que permite la reducción de datos. Figura 4.2 ilustra un ejemplo de cómo se ven las señales DWT y cómo se proporciona la reducción de datos. La figura 4.2a muestra una señal 512-muestra típica que es normalizado a la amplitud unidad. El eje horizontal es el número de muestras, mientras que la vertical, eje es la amplitud normalizada. La figura 4.2b muestra la DWT 8 nivel de la señal en la figura 4.2a. Los últimos 256 muestras en esta señal corresponden a la banda de frecuencia más alta en la señal, las 128 muestras anteriores corresponden a la segunda banda de frecuencia más alta y así sucesivamente. Debería Debe observarse que sólo los primeros 64 muestras, que corresponden a las frecuencias más bajas de los análisis, llevar información relevante y el resto de esta señal no tiene prácticamente ninguna información. Por lo tanto, toda pero las primeras 64 muestras se pueden descartar sin ninguna pérdida de información. Así es como DWT proporciona un esquema muy eficaz de reducción de datos.

Figura 4.2 Ejemplo de una DWT

Nos gustaría volver a este ejemplo, ya que aporta datos importantes sobre cómo debería ser DWT interpretado. Antes de eso, sin embargo, tenemos que concluir nuestro análisis matemático de la DWT. Una propiedad importante de la transformada wavelet discreta es la relación entre el impulso las respuestas de los filtros de paso alto y de paso bajo. Los filtros de paso alto y de paso bajo no son independientes entre sí, y están relacionadas por

donde g [n] es la de paso alto, h [n] es el filtro de paso bajo, y L es la longitud del filtro (en número de puntos). Tenga en cuenta que los dos filtros son índice impar alternada invierte versiones de uno al otro. Lowpass a la conversión de paso alto es proporcionada por el (-1) norte término. Filtros que satisfacen esta condición son utilizan comúnmente en el procesamiento de señales, y que son conocidos como los cuadratura Espejo Filtros (QMF). Las dos operaciones de filtrado y de submuestreo pueden ser expresados por

La reconstrucción en este caso es muy fácil, ya que las bases de forma filtros de media banda ortonormales. los procedimiento anterior es seguida en orden inverso para la reconstrucción. Las señales en todos los niveles son upsampled por dos, pasado a través de los filtros de síntesis GA € ™ [n], y HA € ™ [n] (de paso alto y de paso bajo, respectivamente), y después se añadió. El punto interesante aquí es que los filtros de análisis y síntesis son idénticos entre sí, a excepción de una inversión del tiempo. Por lo tanto, la fórmula de reconstrucción se convierte en (para cada capa)

Sin embargo, si los filtros no son de media banda ideal, entonces la reconstrucción perfecta no se puede lograr. Aunque no es posible realizar filtros ideales, bajo ciertas condiciones, es posible encontrar filtros que proporcionan una reconstrucción perfecta. Las más famosas son las desarrolladas por Ingrid Daubechies, y se les conoce como ondas Daubechiesâ € ™.

Tenga en cuenta que debido a submuestreo sucesiva por 2, la longitud de la señal debe ser una potencia de 2, o al menos un múltiplo de potencia de 2, con el fin de que este esquema sea eficiente. La longitud de la señal determina el número de niveles que la señal se puede descomponer a.

Por ejemplo, si la longitud de la señal es son posibles 1024, diez niveles de descomposición. Interpretación de los coeficientes DWT a veces puede ser bastante difícil debido a la forma en DWT coeficientes se presentan es bastante peculiar. Para hacer una larga historia verdadera reales a corto, DWT coeficientes de cada nivel se concatenan, empezando por el último nivel. Un ejemplo es con el fin de hacer de este concepto claro:

Supongamos que tenemos una señal larga de 256 muestras muestreada a 10 MHz y que desee obtener su DWT coeficientes. Puesto que la señal se muestrea a 10 MHz, el componente de frecuencia más alta que existe en la señal es de 5 MHz. En el primer nivel, la señal se pasa a través del filtro paso bajo h [n], y el filtro de paso alto g [n], las salidas de los cuales están submuestreada por dos. La salida del filtro de paso alto es los primeros coeficientes nivel de TPM. Hay 128 de ellos, y que representan la señal en el [2.5 5] gama MHz. Estas 128 muestras están los últimos 128 muestras trazadas. La salida del filtro de paso bajo, que también tiene 128 muestras, pero que abarca la banda de frecuencia de [0 2,5] MHz, son además descompuesto pasándolos a través de la misma h [n] y g [n]. La salida del segundo paso alto filtro es el nivel 2 coeficientes DWT y estas 64 muestras preceden el nivel 128 1 coeficientes en la trama La salida del segundo filtro de paso bajo se descompone aún más, una vez más pasándolo a través de los filtros h [n] y g [n]. La salida del tercer filtro de paso alto es el nivel 3 DWT coefficiets. Estas 32 muestras preceden a las de nivel 2 coeficientes DWT en la trama.

El procedimiento continúa hasta que sólo 1 coeficiente DWT se puede calcular a nivel 9. Éste coeficiente es el primero en ser trazado en el gráfico de DWT. Esto es seguido por 2 Nivel 8 coeficientes, 4 Nivel 7 coeficientes, 8 de nivel de 6 coeficientes, 16 nivel 5 coeficientes, 32 nivel 4 coeficientes, 64 nivel 3 coeficientes, 128 de nivel 2 coeficientes y finalmente 256 de nivel 1 coeficientes. Tenga en cuenta que cada vez menos número de muestras se utiliza a frecuencias más bajas, por lo tanto, la resolución de tiempo disminuye a medida frecuencia disminuye, pero ya que el intervalo de frecuencia también disminuye a bajas frecuencias, el resolución de frecuencia aumenta. Obviamente, los primeros coeficientes no llevaría mucho de la información, simplemente debido a la resolución de tiempo muy reducido. Para ilustrar este ricamente extraño representación DWT vamos a echar un vistazo a una señal del mundo real. Nuestra señal original es una de 256 muestras señal ultrasónica de largo, que se muestrea a 25 MHz. Esta señal fue generado originalmente por utilizando un transductor de 2,25 MHz, por lo tanto el principal componente espectral de la señal es en 2,25 Megahercio. Los últimos 128 muestras corresponden a la gama MHz [6,25 12,5]. Como se desprende de la trama, sin la información está disponible aquí, por lo tanto, estas muestras pueden ser desechados sin ninguna pérdida de información. Las 64 muestras anteriores representan la señal en el [3,12 6,25] gama MHz, que También no lleva ninguna información significativa. Los pequeños fallos corresponden probablemente a la ruido de alta frecuencia en la señal. Las 32 muestras anteriores representan la señal en el [1,5 3,1] gama MHz. Como se puede ver, la mayoría de la energía € ™ s signalâ se centra en estas 32 muestras, como se esperábamos ver. Las 16 muestras anteriores corresponden a [0,75 1,5] MHz y los picos que son vistos en este nivel probablemente representan la envolvente menor frecuencia de la señal. El anterior muestras probablemente no llevan ninguna otra información significativa. Es seguro decir que podemos conseguir por con el 3 rd y 4 th coeficientes de nivel, es decir podemos representar esta señal larga muestra con 256 $16 + 32 = 48$ muestras, una reducción significativa de datos que haría su equipo muy feliz.

Un área que más se ha beneficiado de esta propiedad particular de las transformadas de tren de ondas es procesamiento de imágenes. Como usted bien sabe, las imágenes, sobre todo imágenes de alta resolución, demandan una gran cantidad de espacio en disco. Como cuestión de hecho, si este tutorial está tomando mucho tiempo para descargar, es decir sobre todo debido a las imágenes. DWT se puede utilizar para reducir el tamaño de la imagen sin perder gran parte de la resolución. Aquí es cómo:

Para una imagen dada, se puede calcular la DWT de, por ejemplo cada fila, y desechar todos los valores del DWT que se encuentran a menos de un cierto umbral. A continuación, guardar sólo los coeficientes DWT que son por encima del umbral para cada fila, y cuando tenemos que reconstruir la imagen original, simplemente almohadilla de cada fila con tantos ceros como el número de coeficientes desechados, y el uso de la inversa DWT para reconstruir cada fila de la imagen original. También podemos analizar la imagen en diferentes bandas de frecuencia, y reconstruir la imagen original utilizando sólo los coeficientes que son de una banda particular. Voy a tratar de poner imágenes de muestra esperemos que pronto, para ilustrar este punto.

Otra cuestión que está recibiendo cada vez más atención está llevando a cabo la descomposición (Sub-banda de codificación), no sólo en el lado de paso bajo, pero en ambos lados. En otras palabras, el zoom en ambas bandas de frecuencias bajas y altas de la señal por separado. Esto puede ser visualizado como teniendo ambos lados de la estructura de árbol de la Figura 4.1. ¿Qué resultado es lo que se conoce como el tren de ondas paquetes . No vamos a discutir los paquetes de tren de ondas en este aquí, ya que está más allá del alcance de este tutorial. Cualquiera que esté interesado en paquetes de tren de ondas, o más información sobre DWT puede encontrar esta información en cualquiera de los numerosos textos disponibles en el mercado.

Y con esto concluye nuestra mini serie de tutorial de tren de ondas. Si pudiera ser de alguna ayuda a cualquiera luchando por comprender las ondas, consideraría el tiempo y el esfuerzo que en este tutorial bien gastado. Me gustaría recordar que este tutorial no es ni una ni completa el pase la cobertura de la wavelet transforma. Se trata simplemente de una visión general del concepto de ondas y se está destinado a servir como una primera referencia para aquellos que encuentran los textos disponibles en pequeñas ondas en vez Complicado. Puede haber muchos errores estructurales y / o técnicos, y apreciaría si usted podría señalar aquellos a mí. Su reacción es de suma importancia para el éxito de este tutorial.

Muchas gracias por su interés en el Wavelet Tutorial.